

Chapitre IV

Transition vers le Chaos dans les Systèmes Dissipatifs

Table des matières

IV Transition vers le Chaos dans les Systèmes Dissipatifs	1	IV.6 Le théorème de Ruelle Takens Newhouse	14
IV.1 Effets des frottements	1	IV.7 Exposants de LYAPOUNOV et dimension fractale	14
IV.1.1 L'oscillateur amorti	2	IV.7.1 Exposants de Lyapounov	15
IV.1.2 La contraction des aires	2	IV.7.2 Dimension d'un attracteur	15
IV.2 Section de POINCARÉ et Instabilité du Cycle Limite	2	IV.8 Exercices	16
IV.2.1 L'oscillateur entretenu	2	IV.8.1 Itérations	16
IV.2.2 Les cycles limites	2	IV.8.2 La bille qui rebondit	16
IV.2.3 Concepts Mathématiques	2	IV.9 La bille qui rebondit sur un haut parleur	16
IV.2.4 Les trois types d'instabilité	3		
IV.3 Intermittence de type I	3	Résumé	
IV.3.1 Un modèle intuitif, mais insuffisant	4	Dans ce chapitre, nous étudions les systèmes dissipatifs présentant une transition vers le chaos. Puisqu'un système dissipatif est un système hamiltonien auquel on a ajouté des frottements, nous analysons les transformations de l'espace des phases décrit au chapitre précédent lorsque l'on ajoute une telle source de dissipation.	
IV.3.2 Modèle général	4	Nous considérons deux exemples : la boussole et l'oscillateur dans un potentiel à deux puits soumis à une perturbation périodique. Dans ces deux cas, les frottements simplifient l'analyse puisque un nombre restreint de conditions initiales doivent être étudiées. Dès lors, l'état de ces systèmes ne dépend plus que du paramètre de contrôle (le paramètre de stochasticité pour la boussole). En l'augmentant, nous observons une transition d'un état régulier vers un état chaotique.	
IV.3.3 Le mécanisme de réinjection	4	Certes loin de cette transition, les régimes chaotiques des deux systèmes leur sont propres, mais pour ces deux exemples, la transition vers le chaos est identique. Cette similitude n'est pas un hasard : il existe en fait trois types de transition d'un régime régulier vers un régime chaotique. Ce sont ces <i>scénarios</i> que nous décrivons ici.	
IV.4 Traversée du cercle unité par -1	6		
IV.4.1 Dédoublage de période	6		
IV.4.2 Cascade sous-harmonique	7		
IV.4.3 Le mapping logistique	7		
IV.4.4 Intermittence de type III	8		
IV.4.5 Divergence du sous-harmonique	8		
IV.4.6 Statistique des phases laminaires	8		
IV.5 Traversée du cercle unité par un point non réel	9		
IV.5.1 L'oscillateur de VAN DER POL	9		
IV.5.2 Bipériodisme	9		
IV.5.3 Quasipériodicité	10		
IV.5.4 Perturbations à toutes les échelles	13		
IV.5.5 Observation expérimentale	13		
IV.5.6 Intermittence de type II	14		
		IV.1 Effets des frottements	
		Les frottements sont à l'origine de la dissipation d'énergie. De ce fait, ils ont pour effet de ramener un système	

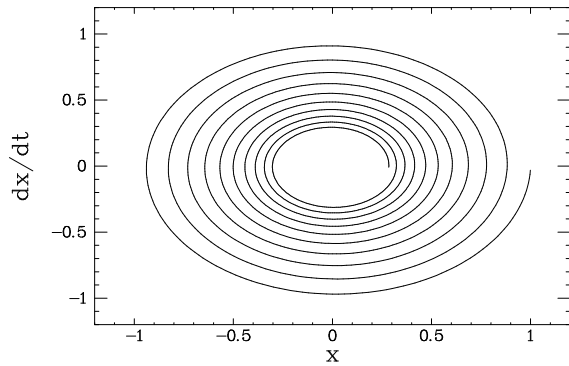


FIG. IV.1: Trajectoires de l'oscillateur amorti. La contraction des aires amène toutes les conditions initiales à l'origine.

vers son (ou l'un de ses) minimum(s) d'énergie potentielle. Ils sélectionnent de cette façon une (ou un petit nombre de) trajectoire(s) pour l'évolution du système. En comparaison aux systèmes hamiltoniens, pour lesquels une trajectoire unique est déterminée par chaque condition initiale, la dissipation joue un rôle simplificateur : elle permet de ne considérer que les trajectoires correspondant à un minimum d'énergie potentielle.

IV.1.1 L'oscillateur amorti

Illustrons ce phénomène sur un système linéaire où nous pouvons tout calculer exactement : l'oscillateur harmonique amorti.

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0.$$

Les solutions sont de la forme :

$$x_0(t) = x_{t=0} \exp\left(\frac{-\gamma t}{2m}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m}t + \phi\right)$$

Quand $4km > \gamma^2$, la trajectoire spirale l'origine de l'espace des phases. Si $4km < \gamma^2$, elle ne tourne plus et converge rapidement vers l'origine (l'amortissement est surcritique).

IV.1.2 La contraction des aires

De façon générale, dans tous les systèmes dissipatifs, et en l'absence d'apport d'énergie, tous les points de l'espace des phases aboutissent à l'origine. Tout élément de volume de celui-ci se contracte en un point, au cours de son évolution.

IV.2 Section de POINCARÉ et Instabilité du Cycle Limite

De même que les frottements réduisent la trajectoire de l'oscillateur harmonique, initialement de dimension un dans un espace des phases de dimension deux, à un point, ils réduisent celle de l'oscillateur entretenue à une trajectoire unidimensionnelle et non plus bidimensionnelle.

IV.2.1 L'oscillateur entretenue

D'un point de vue pratique, un oscillateur entretenue est par exemple un haut parleur alimenté par une tension sinusoïdale. Son équation s'écrit :

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = a\cos(\omega t) \quad (IV.1)$$

Si $\gamma = 0$, il n'y a pas de frottement et le système évolue dans un espace des phases de dimension trois $(x, \dot{x}, \phi = \omega t)$. Il est naturel d'en chercher une solution oscillant à la pulsation ω . Un calcul simple nous conduit à une solution de la forme :

$$x_1(t) = \frac{a}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma} \cos(\omega t) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{k/m}. \quad (IV.2)$$

IV.2.2 Les cycles limites

La solution générale de l'équation IV.1 est une superposition des trajectoires $x_0(t)$ et $x_1(t)$. C'est une spirale s'enroulant vers l'ellipse que représente la solution IV.2. Cette dernière correspond à la solution "stationnaire" de l'oscillateur, c'est-à-dire à celle atteinte aux temps longs. Il ne s'agit donc pas d'un point fixe mais d'un *cycle limite*. Comme le haut parleur est un système linéaire, ce cycle limite est stable et reste toujours régulier.

Pour les systèmes non linéaires, cette propriété n'est plus vraie. Une bille dans un potentiel à deux puits soumise à une excitation périodique, ou une boussole soumise à un champ fixe et un champ tournant possèdent également des solutions régulières ayant la forme de cycles limites. Mais, dans certaines conditions, ceux-ci se déstabilisent et conduisent à des comportements chaotiques.

IV.2.3 Concepts Mathématiques

Dans l'espace des phases, un cycle limite correspond à l'existence d'une solution périodique. Pour étudier la stabilité linéaire d'une telle solution, il nous faut faire appel à la théorie de FLOQUET.

Appelons $\vec{X}(t)$ cette solution de période T . Elle vérifie l'équation différentielle de départ qui définit le

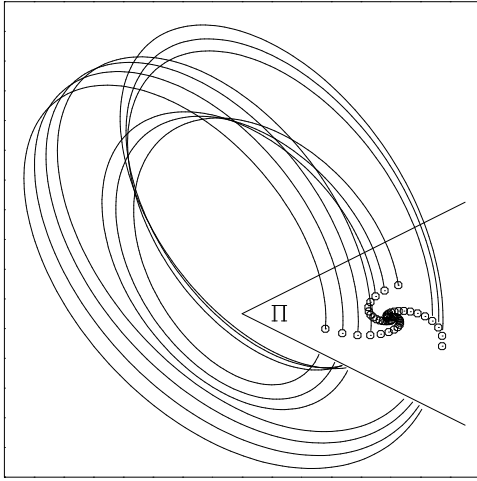


FIG. IV.2: Section de POINCARÉ d'une trajectoire correspondant à un oscillateur entretenu par une perturbation périodique.

système dynamique :

$$d\vec{X}/dt = F(\vec{X})$$

On perturbe \vec{X} par \vec{x} , qui vérifie alors l'équation linéarisée suivante :

$$d\vec{x}/dt = \mathcal{L}(\vec{x})$$

où \mathcal{L} est l'opérateur tangent en \vec{X} à F . Comme \vec{X} est périodique, on peut chercher une solution $\vec{x}(t)$ sous la forme : $\vec{x}(t) = e^{st}\vec{w}(t)$, où $\vec{w}(t)$ est une fonction périodique de période T . La théorie de Floquet revient à effectuer une stroboscopie du cycle limite à la fréquence T . On étudie donc en fait la stabilité d'un point du cycle dans un plan perpendiculaire à celui-ci. Ce plan, appelé *section de POINCARÉ* (ou coupe de POINCARÉ) est déterminé par le choix d'une phase.

Les intersections successives du cycle limite avec le plan de coupe définissent une suite de points \vec{X}_n , où n est l'indice du tour. On passe d'un point à son suivant par l'application g , appelée carte de premier retour : $\vec{X}_{n+1} = g(\vec{X}_n)$, et définie par :

$$\begin{cases} \vec{X}(t+T) = g(\vec{X}(t)) \\ \text{dans la section de POINCARÉ} \end{cases}$$

Les valeurs propres de g , $\lambda_k = e^{s_k T}$, sont appelées *multiplieurs de FLOQUET*. La suite des \vec{X}_n converge ou diverge dans la section de POINCARÉ, selon les valeurs propres λ_k . Si l'une d'entre elles est supérieure à 1 en norme, la suite diverge et le cycle est instable. Au contraire, si toutes les valeurs propres sont de norme inférieure à 1, le cycle est stable.

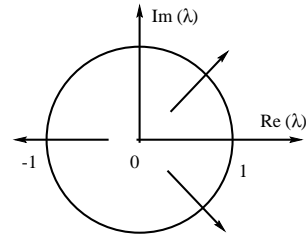


FIG. IV.3: Les différents cas possibles de traversée du cercle unité

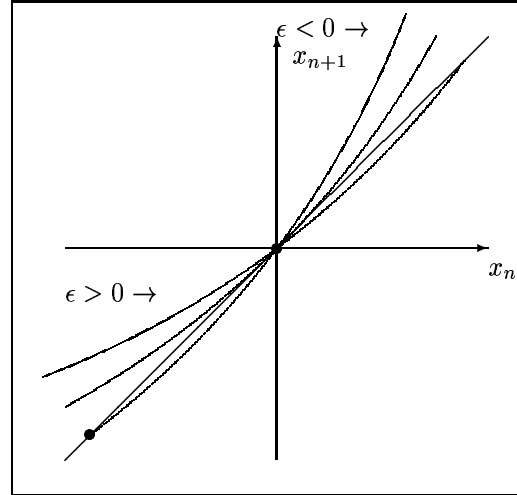


FIG. IV.4: Echange de stabilité des points fixes : lorsque ϵ varie, la parabole $f(x) = (1+\epsilon)x - ax^2$ tourne autour de l'origine.

IV.2.4 Les trois types d'instabilité

Les façons dont les λ_k traversent le cercle unité dans le plan complexe quand un paramètre de contrôle varie caractérisent les différentes routes vers le chaos.

Trois cas se présentent (voir fig. IV.3) :

- Traversée d'un multiplieur en +1,
- Traversée d'un multiplieur en -1,
- Traversée d'une paire conjuguée de multiplieurs en $e^{2\pi i\alpha}$.

Comme dans la classification des bifurcations, à chaque cas correspond une forme normale pour l'application $\vec{X}_{n+1} = g(\vec{X}_n)$. Nous ne présentons pas ici la manière d'établir ces formes normales, obtenues en supprimant les termes non-linéaires non-résonants.

IV.3 Intermittence de type I

l'intermittence de type I correspond à la traversée au point +1. Considérons un espace des phases de dimension 3 ; le plan de coupe de POINCARÉ est donc

de dimension 2. L'application g possède deux multiplicateurs de FLOQUET, correspondant à deux directions dans ce plan. Quand les deux multiplicateurs sont de normes inférieures à 1, le cycle est stable ; la suite de \vec{X}_n converge vers un point fixe. Quand l'un des multiplicateur de FLOQUET passe par +1, une direction propre du plan devient dilatante, l'autre restant contractante¹. Les \vec{X}_n se regroupent tous sur une même direction propre et la forme normale peut s'exprimer en termes d'une seule variable réelle x . Cette approximation est évidemment simplificatrice mais elle s'avère donner une excellente description tant que le module de la seconde valeur propre reste inférieur à 1 et que les excursions de la trajectoire dans l'espace des phases demeurent petites.

IV.3.1 Un modèle intuitif, mais insuffisant

Dès que le multiplicateur devient plus grand que 1, le point fixe $x = 0$ perd sa stabilité et il faut inclure une non-linéarité pour décrire l'évolution de x . L'expression la plus générale pour x_n est :

$$x_{n+1} = (1 + \epsilon)x_n + ax_n^2 + \dots \quad (\text{IV.3})$$

où ϵ est le paramètre de contrôle. Lorsque ϵ varie d'une valeur négative à une valeur positive, les deux points fixes échangent leur stabilité :

Point fixe	$\epsilon < 0$	$\epsilon > 0$
$x = 0$	stable	instable
$x = a/\epsilon$	instable	stable

La figure IV.4 procure une représentation graphique de ce phénomène.

En fait, en écrivant l'équation IV.3, nous avons implicitement supposé que le cycle limite persistait pendant la bifurcation. Cette situation n'est pas la plus générale, et il existe une autre façon de déployer la singularité au point de bifurcation.

IV.3.2 Modèle général

Au lieu de faire tourner la parabole comme dans la figure IV.4, on peut la translater. Ceci correspond à la forme normale suivante :

$$x_{n+1} = \epsilon + x_n + ax_n^2 \quad (\text{IV.4})$$

Lorsque $\epsilon < 0$, il existe deux points fixes, dont la stabilité est facilement étudiée par la représentation graphique de la figure IV.5. La forme de l'équation IV.4 peut surprendre car on pourrait croire que le multiplicateur de FLOQUET reste égal à 1 indépendamment de

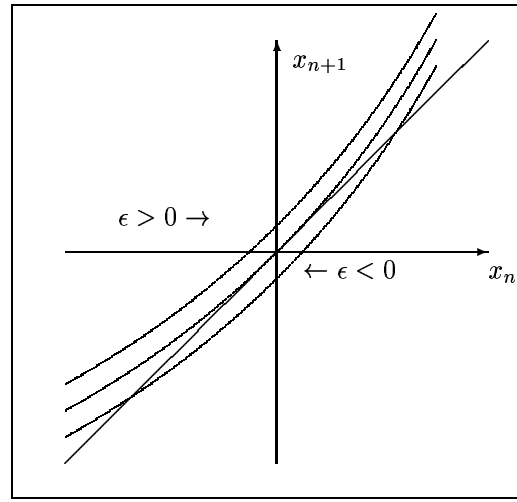


FIG. IV.5: Disparition des points fixes : lorsque ϵ varie, la parabole $f(x) = \epsilon + x - ax^2$ se translate verticalement. Pour $\epsilon < 0$, elle coupe la bissectrice en deux points. Pour $\epsilon > 0$ il n'y a plus d'intersection et donc plus de point fixe.

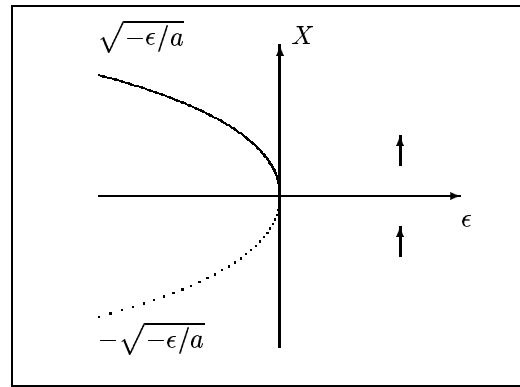


FIG. IV.6: Diagramme de bifurcation nœud col de l'intermittence de type I.

ϵ . C'est exact au point $x = 0$, mais il n'est plus le point fixe de l'application. Ses points fixes sont $\pm\sqrt{-\epsilon/a}$, avec $-\sqrt{-\epsilon/a}$ stable et $+\sqrt{-\epsilon/a}$ instable. Le lecteur vérifiera que le multiplicateur de FLOQUET du point fixe $-\sqrt{-\epsilon/a}$ varie comme $1 - 2\sqrt{-a\epsilon}$. Lorsque $\epsilon = 0$, les deux points fixes coalescent en $x = 0$: la courbe est tangente à la première bissectrice comme le montre la figure IV.5. Le diagramme de bifurcation correspondant à la forme normale IV.4 est tracé en figure IV.6.

Enfin pour $\epsilon > 0$, il n'y a plus ni point fixe stable, ni point fixe instable, mais juste un étroit canal entre la parabole et la première bissectrice (cf. fig. IV.7).

IV.3.3 Le mécanisme de réinjection

Pour ϵ positif mais petit, le système reste longtemps dans ce canal avant d'en sortir : ses itérations succes-

¹Ce passage du multiplicateur de FLOQUET par +1 peut être vu comme une résonance 1/1 particulièrement forte.

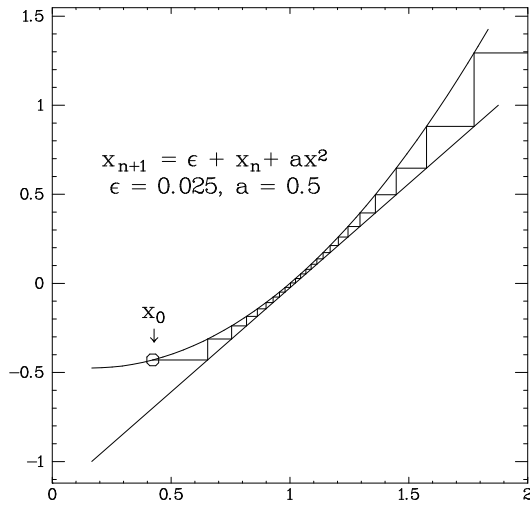


FIG. IV.7: Pour $\epsilon > 0$, les itérés successifs ont lieu entre la parabole et la bissectrice. la trajectoire passe lentement près des fantômes des points fixes qui existaient pour $\epsilon < 0$.

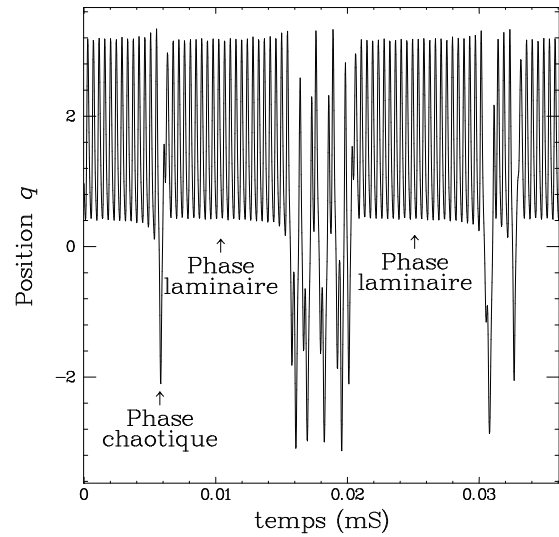


FIG. IV.8: Signal temporel de la position de l'oscillateur de Duffing excité périodiquement. Les longues bouffées régulières entrecoupées de courtes phases de chaos correspondent à l'intermittence de type I.

sives passent beaucoup de temps près des fantômes des anciens points fixes. Durant cette phase, on a l'impression que le signal est périodique; cependant son amplitude augmente régulièrement.

Le mécanisme que nous venons de décrire est à la base de ce que l'on nomme l'*intermittence de type I*. Cependant ce mécanisme est nécessaire mais pas suffisant : il explique une instabilité du cycle limite qui conduit à une exploration de l'espace des phases par la trajectoire, c'est-à-dire à de grandes valeurs de x , pour lesquelles différents scénarios sont possibles. Soit la trajectoire est captée par un autre attracteur et l'on a simplement une transition d'un point fixe à un autre, soit la trajectoire est réinjectée dans le canal par un mécanisme qui ne peut pas être décrit par une équation comme celle IV.4, et l'on observe alors l'intermittence. Dans ce dernier cas, on observe une alternance de longues bouffées régulières entrecoupées par de courtes bouffées turbulentes. Les bouffées régulières sont décrites par le modèle IV.4 et sont aussi appelées phases laminaires. Il est ainsi possible de calculer la durée moyenne des phases laminaires. On trouve qu'elle évolue et diverge comme $1/\sqrt{\epsilon}$.

Ce type d'intermittence a été prédit théoriquement et observé numériquement par Y. POMEAU et P. MANNEVILLE [1] sur le modèle de LORENZ que nous étudions plus loin. Il fut observé expérimentalement pour la première fois par P. BERGÉ et M. DUBOIS dans une expérience de RAYLEIGH-BÉNARD [2].

Ce scénario est reconnu comme l'un des trois qui conduisent au chaos. Il est décelable par la construction de la carte du premier retour $X_{n+1} = g(X_n)$ et

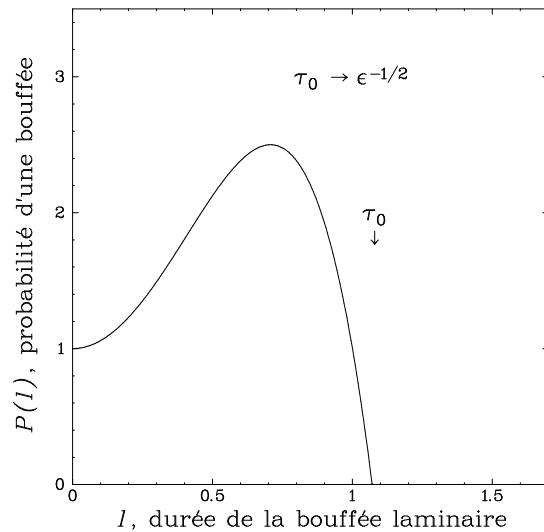


FIG. IV.9: $P(\tau)$ est la densité de probabilité d'obtenir une durée de phase laminaire de τ .

par l'étude statistique des phases laminaires. On peut montrer que la durée des phases laminaires est bornée supérieurement par un temps τ_0 de l'ordre de $\epsilon^{-1/2}$ (voir fig. IV.9).

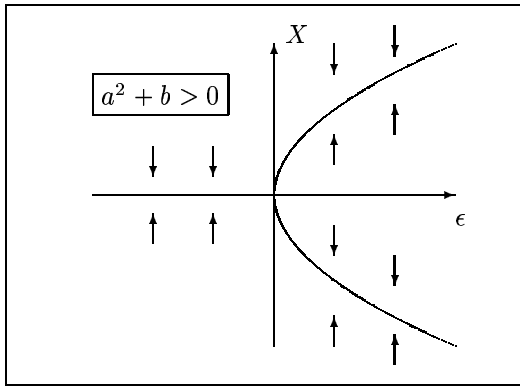


FIG. IV.10: Cas $a^2 + b > 0$. La bifurcation est de type fourche.

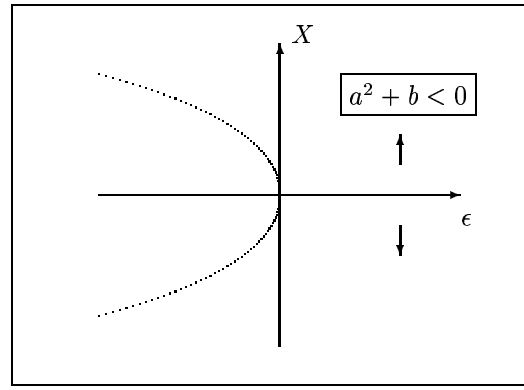


FIG. IV.11: Cas $a^2 + b < 0$. La bifurcation est sous-critique.

IV.4 Traversée du cercle unité par -1

Analogie à une bille tournant au fond d'un puits, le centre d'un cycle limite est semblable au centre d'une résonance. Or nous savons qu'une résonance est profondément modifiée par l'apparition de l'accrochage $1/2$. C'est précisément ce phénomène qui conduit à l'instabilité que nous décrivons ici.

Lorsque l'un des multiplicateurs de FLOQUET traverse le cercle unité en passant par -1 , la section de POINCARÉ présente comme précédemment une direction contractante et une direction dilatante. Mais cette fois-ci, les points d'intersection du flot avec le plan vont s'éloigner de leur position d'équilibre en oscillant de part et d'autre de ce point.

Dans ce cas, la forme normale s'écrit :

$$x_{n+1} = -(1 + \epsilon)x_n + ax_n^2 + bx_n^3 \quad (\text{IV.5})$$

De même que pour l'intermittence de type I, nous étudions la stabilité du cycle limite au voisinage de $\epsilon = 0$ par l'étude de $g(x_n) = x_{n+1}$. Mais cette fois-ci, le caractère sous-critique ou supercritique de la bifurcation conditionne le type de transition vers le chaos.

Pour le voir, observons la façon dont les itérés successifs divergent. Calculons $x_{n+2} = g \circ g(x_n)$ en supposant ϵ très petit :

$$x_{n+2} = (1 + 2\epsilon)x_n - 2(a^2 + b)x_n^3$$

L'application $g \circ g$ peut présenter deux nouveaux points fixes si $(a^2 + b) > 0$. Ces points, égaux à $x_{\pm} = \pm \sqrt{\epsilon / (a^2 + b)}$, sont stables pour $\epsilon > 0$: la bifurcation est de type *fourche*.

Au contraire, si la bifurcation est sous-critique, c'est-à-dire $(a^2 + b < 0)$, il est nécessaire d'introduire des termes d'ordre cinq au moins pour saturer la solution. Au voisinage du point fixe zéro, il n'y a plus

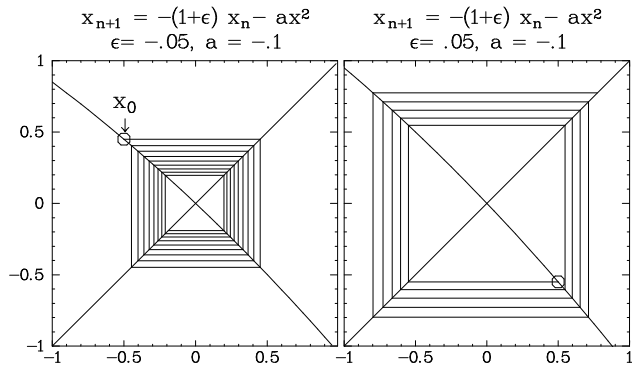


FIG. IV.12: Iterations a- dans le cas stable $\epsilon < 0$; b- dans le cas instable $\epsilon > 0$.

de point stable comme le montre la figure IV.11. Ces deux cas de bifurcations vont déterminer deux types de transitions vers le chaos :

- **Supercritique** \rightarrow Cascade de bifurcation sous-harmoniques,
- **Sous-critique** \rightarrow Intermittence de type III.

IV.4.1 Dédoublage de période

Après la traversée par -1 du multiplicateur de FLOQUET, la suite des x_n présente deux points d'accumulation correspondant aux solutions stables de la bifurcation fourche. La carte de premier retour a l'allure présentée en figure IV.12. Comme nous l'avons vu, l'existence de deux points fixes est conditionnée par $a^2 + b > 0$. On peut interpréter cela en traçant la carte de second retour (cf. fig. IV.13).

Nous constatons que x_+ et x_- sont bien les points fixes de $g \circ g$ avec $g \circ g(x_+) = g(x_-) = x_+$ et $g \circ g(x_-) = g(x_+) = x_-$. Le mouvement a maintenant lieu sur une boucle : l'orbite s'enroule sur un ruban de MOEBIUS. La période est devenue double de la période initiale. C'est

IV.4.2 Cascade sous-harmonique

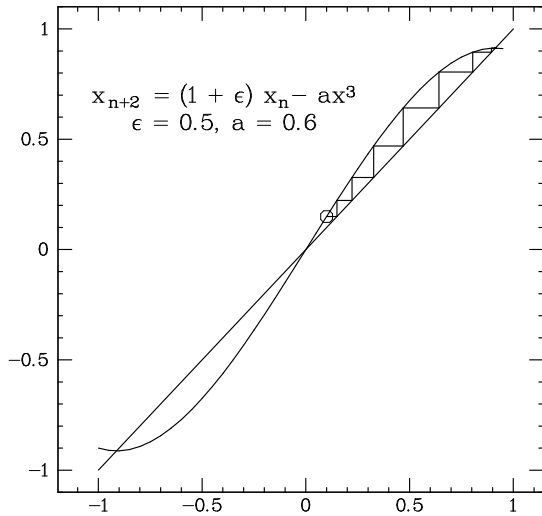


FIG. IV.13: Carte de second retour.

Ce phénomène va pouvoir se répéter. La pente de $g \circ g$ à l'intersection x_+ et x_- peut diminuer avec ϵ . Quand sa valeur passe par -1 , ces points fixes se déstabilisent à leur tour et le processus recommence. Il introduit cette fois-ci une période quadruple de la période initiale. On peut montrer que les propriétés de $g^{(n)}$ sont analogues et donc qu'une cascade de bifurcations est possible. Les périodes s'allongent de plus en plus : $1, 2, 4, \dots, 2^n$.

Chaque bifurcation sous-harmonique peut être numérotée et a lieu pour une valeur ϵ_n . Il est possible d'analyser par récurrence la suite des bifurcations. Pour comparer l'étape $n - 1 \rightarrow n$ à $n \rightarrow n + 1$, on trouve qu'il faut opérer un changement d'échelle à la fois sur x et sur ϵ . Les valeurs des ϵ_n convergent ainsi vers un point d'accumulation ϵ_∞ . A cette valeur du paramètre de contrôle, la période devient infinie. Ce phénomène présente une forte ressemblance avec une transition de phase et l'on définit des exposants critiques δ et α par :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_n - \epsilon_{n-1}}{\epsilon_{n+1} - \epsilon_n} = \delta \simeq 4.669201\dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^+ - x_{n-1}^+}{x_{n+1}^+ - x_n^+} = \alpha \simeq 2.502907\dots \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

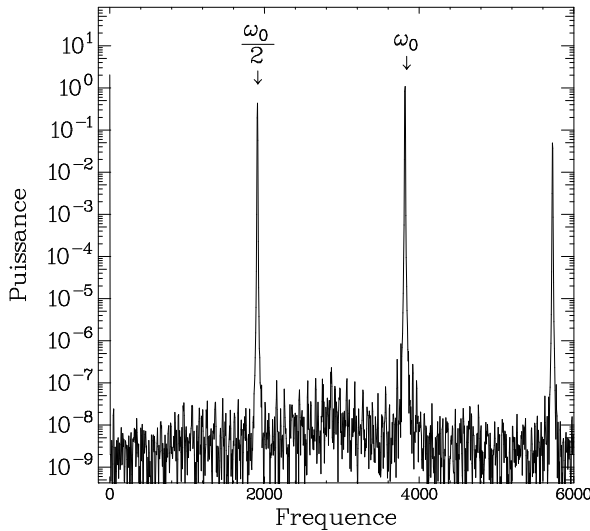


FIG. IV.14: Spectre de puissance montrant l'apparition d'un sous-harmonique.

IV.4.3 Le mapping logistique

Ces exposants sont universels et ne dépendent pas de g : il suffit que g présente un extrêmu quadratique. En particulier, le comportement critique de la cascade de dédoublement de période a été mis en évidence sur le mapping quadratique suivant :

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (\text{IV.7})$$

où r joue le rôle du paramètre de contrôle. On trouve numériquement que $r_\infty = 3.56994\dots$. On peut montrer sur cet exemple que les cycles ont des périodes qui divergent en $(r - r_\infty)^{-\nu}$ avec $\nu = \ln 2 / \ln \delta$. Nous constatons que pour $r \geq r_\infty$, l'attracteur est chaotique. On le détermine d'une manière exacte, en montrant que l'application g possède des propriétés de mélange. Au delà, pour $r > r_\infty$, on observe une cascade inverse, où les sous-harmoniques disparaissent les uns après les autres pour être remplacés par un spectre de bruit. Par ailleurs, au sein du chaos, apparaissent des fenêtres de périodicité associées à des accrochages pour lesquels la trajectoire est régulière. On peut identifier ces fenêtres en considérant les application $g^{(p)}$ qui peuvent présenter des points stables. Ces fenêtres de périodicité alternent avec les trajectoires chaotiques.

L'analogie de cette route vers le chaos avec une transition de phase fut faite par M.J. FEIGENBAUM [3] et indépendamment par P. COULLET et C. TRESSER [4]. Cette route vers le chaos est très couramment observée pour différents types de systèmes expérimentaux.

pourquoi cette bifurcation porte le nom de *bifurcation sous-harmonique*.

Avant cette bifurcation, le spectre de puissance du signal est constitué d'une raie fine et de ses harmoniques. Juste après, le spectre s'enrichit de raies sous-harmoniques. La première apparaît à $f_0/2$, les autres à $(2n + 1)f_0/2$. Ces dernières correspondent à des combinaisons du sous-harmonique et des harmoniques.

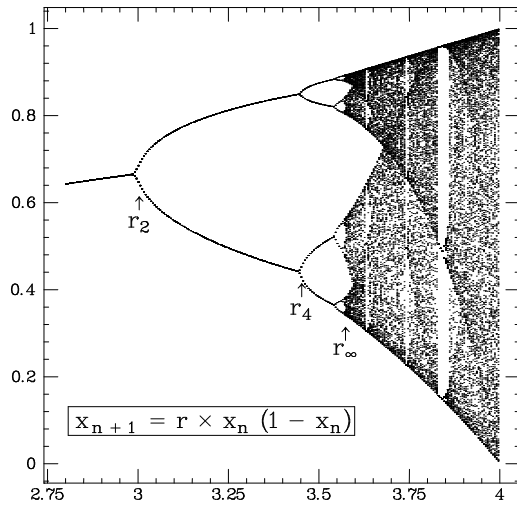


FIG. IV.15: Diagramme de bifurcation de la cascade de dédoublement de période du mapping quadratique.

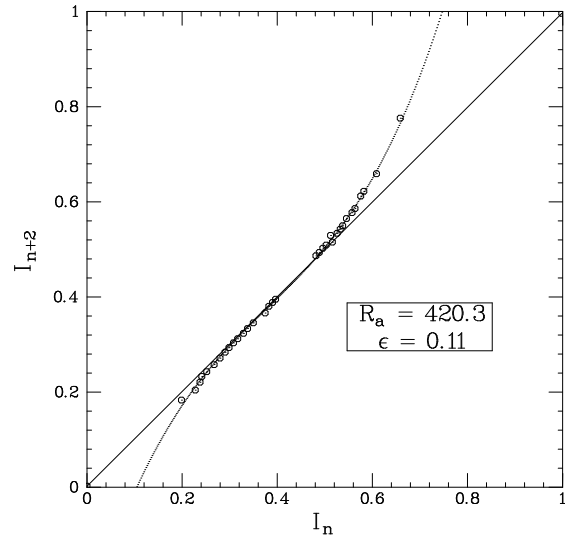


FIG. IV.17: Carte de second retour correspondant à l'intermittence de type III.

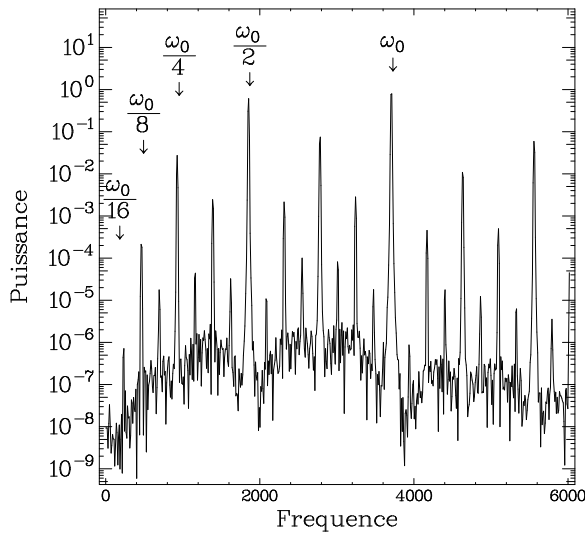


FIG. IV.16: Spectre de puissance caractéristique de la cascade de dédoublement de période, observée ici dans la boussole dissipative soumise à deux champs.

Ce sont A. LIBCHABER et J. MAURER qui l'ont vue pour la première fois dans une expérience de convection de RAYLEIGH-BÉNARD [5]. On l'observe aussi dans la transition de la boussole dissipative soumise à un champ fixe et un champ tournant [7] ainsi que dans de nombreux autres exemples. A chaque fois, le scénario est le même, et les exposants α , δ sont identiques (dans la mesure où la non-linéarité est quadratique, ce qui est le cas général). La signature de ce scénario est facilement observable dans le spectre de puissance d'une variable du système. Nous avons reproduit sur la figure IV.16 l'allure typique des spectres.

IV.4.4 Intermittence de type III

A la traversée du point -1 par le multiplicateur de FLOQUET, la bifurcation est sous-critique lorsque $a^2 + b < 0$. La carte de premier retour ne possède plus de couples (x_+, x_-) tels que $f(x_+) = x_-$ et $f(x_-) = x_+$. La carte de second retour n'a plus de points fixes et présente l'allure de la figure IV.17. Elle s'écrit :

$$x_{n+2} = (1 + 2\epsilon)x_n + cx_n^3 \text{ avec } c = -2(a^2 + b) \quad (\text{IV.8})$$

IV.4.5 Divergence du sous-harmonique

Les trajectoires divergent. La situation est comparable à celle de l'intermittence de type I : s'il n'existe pas d'attracteur stable dans l'espace des phases mais un transitoire erratique pouvant ramener la trajectoire dans le voisinage immédiat du point fixe instable, on assiste alors à l'intermittence de type III. Elle se caractérise par une croissance du sous-harmonique (au lieu de l'amplitude d'oscillation dans le cas de l'intermittence de type I).

IV.4.6 Statistique des phases laminaires

On peut aussi étudier la durée des phases laminaires, c'est-à-dire des phases durant lesquelles le sous-harmonique s'amplifie régulièrement. Elles sont d'autant plus longues que le point d'injection est voisin du point fixe instable. Contrairement au cas de l'intermittence de type I, la durée des phases laminaires n'est pas bornée.

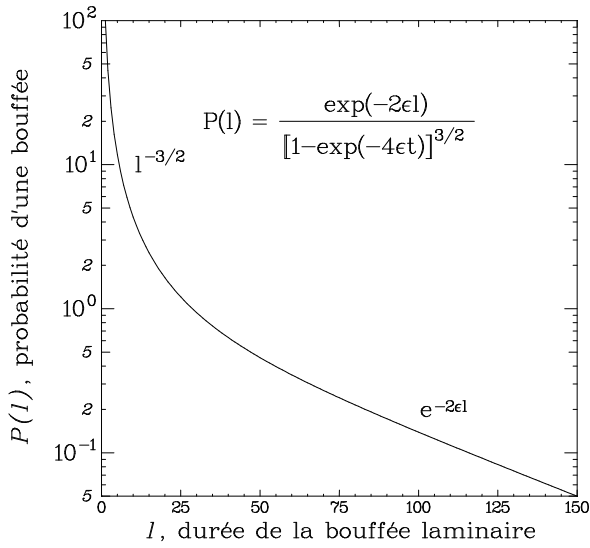


FIG. IV.18: Densité de probabilité des phases laminaires en fonction de leur durée, dans le cas de l'intermittence de type III.

En assimilant l'équation IV.8 à l'équation différentielle $dx/dt = 2\epsilon x + cx^3$, deux domaines d'amplification du sous-harmonique apparaissent : un domaine linéaire où la croissance du sous-harmonique est exponentielle et un domaine non-linéaire où l'évolution est en loi de puissance. Il résulte une distribution de probabilité représentée en figure IV.18, piquée autour de la valeur $\tau_0 \sim \epsilon^{-1}$ et qui n'est pas bornée aux grandes valeurs de τ .

$$\begin{cases} \bullet & \text{petites durées} & : & \tau \ll \epsilon^{-1} & P(\tau) \sim \tau^{-3/2} \\ \bullet & \text{grandes durées} & : & \tau \gg \epsilon^{-1} & P(\tau) \sim e^{-2\epsilon\tau} \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

Ce type d'intermittence a été prédit théoriquement et observé numériquement par Y. POMEAU et P. MANNEVILLE [1]. Il fut aussi observé expérimentalement pour la première fois par P. BERGÉ, M. DUBOIS et M. RUBIO dans une expérience de RAYLEIGH-BÉNARD [6].

IV.5 Traversée du cercle unité par un point non réel

IV.5.1 L'oscillateur de VAN DER POL

Jusqu'à présent, les termes de frottements considérés étaient linéaires. Lorsque ils présentent des non-linéarités, un cycle limite peut apparaître dans un espace des phases de dimension deux. Etudions le cas simple de l'oscillateur de VAN DER POL :

$$m\ddot{x} + \gamma(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0. \quad (\text{IV.10})$$

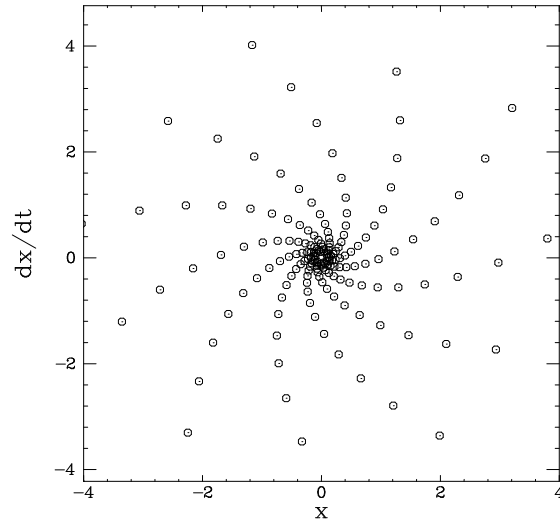


FIG. IV.19: Transitoire correspondant à l'apparition d'une seconde fréquence dans une section de POINCARÉ.

C'est l'équation d'un oscillateur dont les frottements dépendent de l'amplitude. Pour x petit, la dissipation est négative et l'oscillation s'amplifie. Pour x grand, x^2 a une valeur moyenne non nulle : la dissipation devient positive et conduit à une décroissance de l'amplitude. L'état d'équilibre correspond à une oscillation d'amplitude finie telle que $\langle x^2 \rangle = 1$, c'est-à-dire à un cycle limite. Pourtant ce système est dissipatif puisque toutes les conditions initiales aboutissent sur ce cycle limite.

C'est sur ce principe que fonctionnent les oscillateurs électroniques comme les générateurs de fréquence. Les montres et les horloges fonctionnent d'une façon analogue en utilisant le mécanisme d'échappement qui utilise l'énergie d'un ressort.

IV.5.2 Bipériodisme

Lorsqu'on ajoute une perturbation périodique à un oscillateur, un cycle limite se développe sur un système possédant déjà un cycle limite. Le système est *bipériodique*.

A la naissance du second cycle limite, l'un des multiplicateurs de FLOQUET traverse le cercle de rayon unité du plan complexe en un point complexe $e^{2i\pi\alpha}$. La forme normale conduisant à ce type de bifurcations est complexe et s'écrit :

$$z_{n+1} = e^{2i\pi\alpha_0} [(1 + \epsilon)z_n - g|z_n|^2 z_n] \quad (\text{IV.11})$$

avec $0 < \alpha_0 < 1$ et $g \in \mathcal{C}$. On reconnaît la forme normale d'une bifurcation de HOPF. Dans le cas supercritique où $\Re(g) > 0$, en séparant z en module et phase

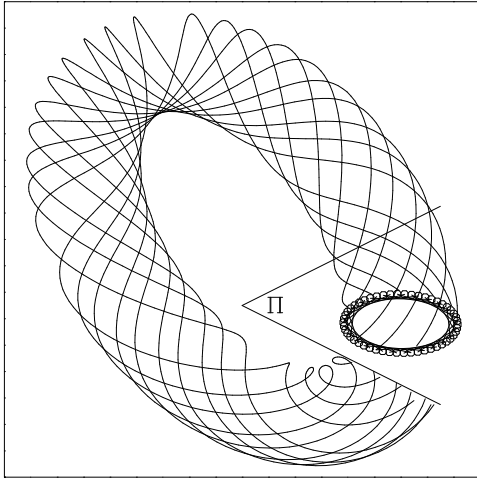


FIG. IV.20: Trajectoire s'enroulant sur un tore T^2 .

$z = \rho e^{2i\pi\phi}$, on obtient :

$$\begin{cases} \rho_{n+1} &= (1 + \epsilon)\rho_n - g_r \rho^3 \\ \phi_{n+1} &= 2\pi - g_i \rho_n^2 + \phi_n \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

Au seuil d'oscillation, l'évolution de la phase prend la forme $\phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi\alpha_0$. Les itérés successifs tournent autour de l'origine d'un angle $2\pi\alpha_0$, comme le montre la figure IV.19; cet angle correspond au rapport des deux fréquences du système. L'amplitude de la nouvelle oscillation est déterminée par $\rho = \sqrt{\epsilon/g}$. Les différents itérés s'alignent ainsi sur un cercle. Les effets non-linéaires sont de deux types. D'une part, ils induisent une variation de la fréquence du second oscillateur avec l'amplitude d'oscillation; d'autre part, ils permettent l'apparition de q bosses sur le cercle, dès que α s'approche d'une valeur rationnelle $\alpha \sim p/q$.

Dans l'espace des phases à trois dimensions, la trajectoire s'inscrit s'enroule sur un tore T^2 , surface à forme de chambre à air (cf. fig. IV.20).

IV.5.3 Quasipériodicité

Si g_r est positif, la bifurcation est supercritique et l'amplitude de la seconde oscillation reste finie : le système dynamique est devenu *bipériodique*. Cette situation présente une grande analogie avec les systèmes hamiltoniens à deux fréquences, que nous avons discutés précédemment. En particulier, le rapport des deux fréquences, ici égal à α , joue un rôle fondamental. Des accrochages entre les deux fréquences se produisent pour les valeurs rationnelles $\alpha = p/q$: les chapelets de résonances des systèmes hamiltoniens deviennent en quelque sorte des bassins d'attraction pour la trajectoire du système dynamique dissipatif. Celle-ci s'enroule autour du tore et repasse par le même point au bout de q tours, sans donc recouvrir tout le tore.

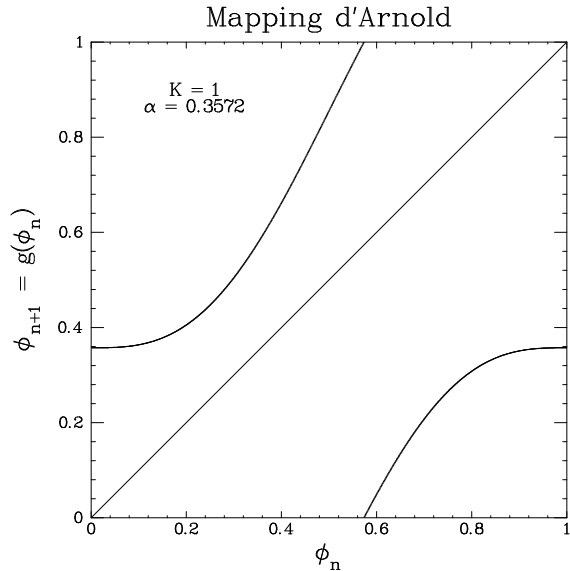


FIG. IV.21: Carte de premier retour du modèle d'Arnold.

Quand le rapport des fréquences α est irrationnel, la trajectoire ne repasse jamais par le même point et couvre uniformément le tore, qui devient l'analogue d'un tore de KAM. Ainsi une telle trajectoire persiste jusqu'à une valeur finie du niveau de perturbation.

Pour étudier le comportement quasipériodique, il est commode d'utiliser un modèle simplifié, inspiré de l'équation IV.12, appelé modèle d'ARNOLD. L'amplitude y est fixée et on ne s'intéresse qu'à la variable de phase. Il s'écrit :

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \alpha - (K/2\pi) \sin(2\pi\phi_n) \quad (\text{IV.13})$$

que l'on peut noter $\phi_{n+1} = g_{\alpha,K}(\phi_n)$. La première partie de l'équation : $\phi_{n+1} = \phi_n + \alpha$ traduit la rotation dans la section de POINCARÉ liée à la seconde fréquence du système. La contribution en $\sin(2\pi\phi_n)$ peut être vue comme l'effet d'une résonance qui module la phase de la seconde oscillation.

Ce modèle dépend de deux paramètres : α , le rapport des deux fréquences et K , l'intensité de la résonance. Pour $K = 0$, la carte de premier retour est une droite quelle que soit la valeur de α : les deux fréquences s'ignorent. En augmentant K , on observe accrochages et tores irrationnels. Introduisons le nombre de rotation σ défini par :

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_n - \phi_0)/n \quad (\text{IV.14})$$

Il caractérise la fréquence effective d'oscillation, tandis que α caractérise celle que l'on voudrait imposer. Pour une valeur finie de K , il est facile d'observer les accrochages en faisant varier α et en mesurant σ . Lorsqu'un

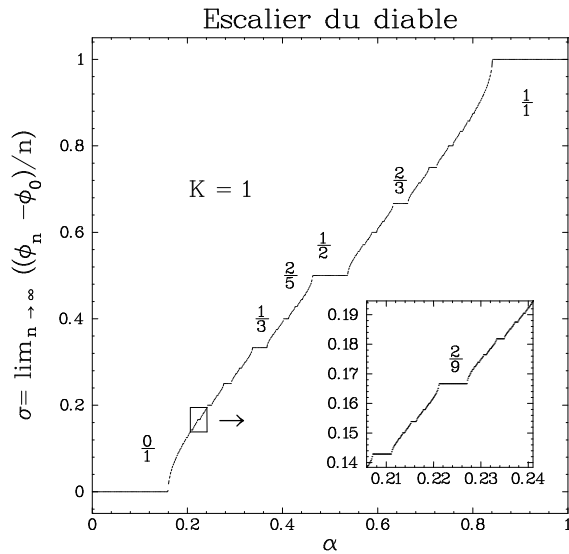


FIG. IV.24: Evolution de σ avec α . La courbe présente une succession de marches pour chaque valeur rationnelle de σ .

les systèmes hamiltoniens. Lorsque K est exactement égal à 1, les différentes langues parviennent au contact. Les accrochages prennent toute la place, et l'escalier du diable est uniquement constitué de marches associées à des rationnels; il est dit *complet*. C'est de plus un objet fractal (cf. infra pour une définition) de dimension égale à 0.87. Enfin, lorsque K devient plus grand que 1, la carte de premier retour présente une bosse de plus en plus prononcée et devient non-inversible : ϕ_{n+1} peut désormais avoir plusieurs antécédents comme on le voit sur la figure IV.25. Ainsi deux types de transition vers le chaos sont observées dans un système quasipériodique :

- A partir d'un accrochage $\alpha = p/q$,
- A partir d'un irrationnel pur.

Dans le premier cas, le système dynamique n'est plus quasipériodique, puisque les deux fréquences sont accrochées. On observe les scénarios, déjà discutés, de transition d'un cycle limite vers le chaos, par cascade de dédoublement de période et par intermittence.

Si le rapport des fréquences reste irrationnel, on observe la destruction du cycle limite par les résonances voisines. Cette route vers le chaos va dépendre de façon quantitative du nombre irrationnel choisi mais sera qualitativement la même pour tous. La représentation des nombres irrationnels pose un problème : toutes les expressions que nous en donnons sont des approximations rationnelles. Une façon commode de les représenter consiste à les écrire sous forme de fraction continue :

$$\sigma = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

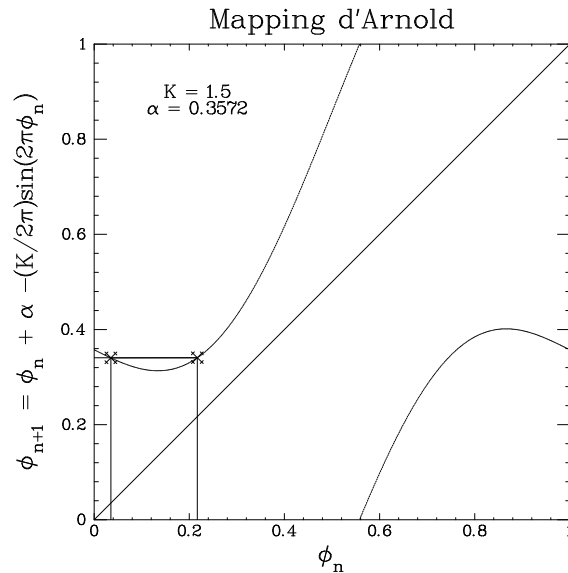


FIG. IV.25: Application d'Arnold pour $K = 1.5$, ϕ_1 possède deux antécédents.

Le nombre σ peut être représenté par la série a_1, a_2, a_3, \dots . Le développement du *nombre d'or* a tous ses coefficients égaux à 1 : $a_i = 1, \forall i$. Cet irrationnel, qui vaut $(\sqrt{5} - 1)/2$, est aussi le nombre le plus mal approximé par un rationnel. En effet, une telle représentation rationnelle est obtenue en interrompant la fraction continue à l'ordre n . Comme les a_i sont tous égaux à 1, la contribution négligée est maximale. Les approximations successives de Ω_g sont les fractions suivantes :

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \dots, \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

où F_n est le n -ième nombre de FIBONACI, défini par la relation de récurrence :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{avec } F_0 = 1, F_1 = 2.$$

Or la suite F_{n+1}/F_n est alternée. Ainsi $(F_{n+1}/F_n) < \omega_g < (F_{n+2}/F_{n+1})$ (avec n impair) : les approximations rationnelles successifs encadrent le nombre d'or. Comme il est le moins bien approximé par un rationnel, la trajectoire associée au nombre d'or est aussi la plus éloignée des accrochages simples. De ce fait, cette trajectoire sera la dernière à résister lorsque K augmente. Son seuil de disparition correspond précisément à $K = 1$. A cette valeur, la trajectoire est perturbée par les différents accrochages même s'ils ont des dénominateurs très grands.

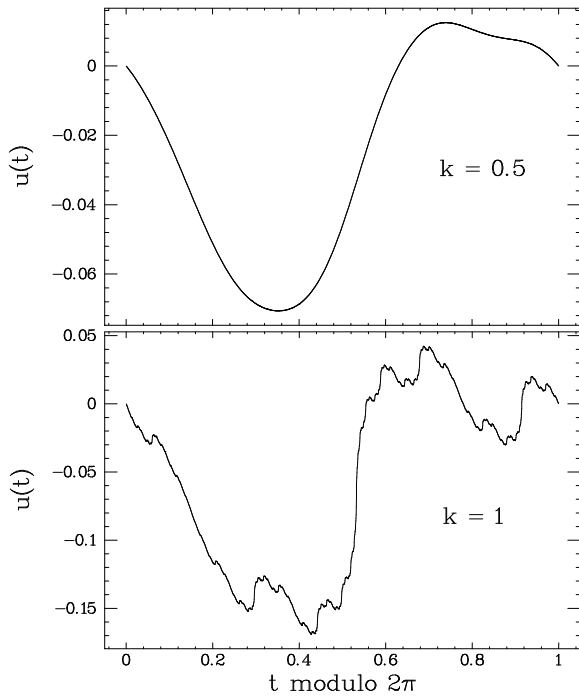


FIG. IV.26: Evolution de la fonction $u(t)$ pour a) $K = 0.5$, b) $K = 1$.

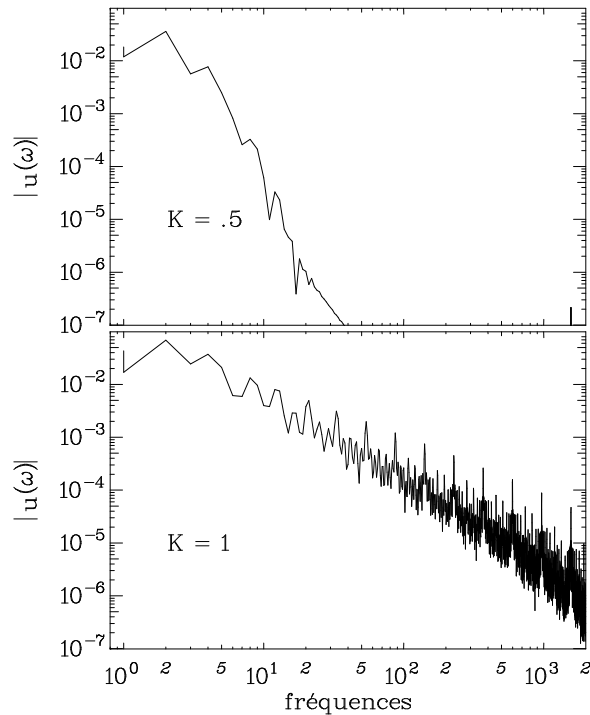


FIG. IV.27: a) Spectre de la courbe $u(t)$, pour $K = 0.5$. Seules les raies aux basses fréquences sont présentes. b) Même spectre pour $K = 1$. Il contient des raies à toutes les fréquences.

IV.5.4 Perturbations à toutes les échelles

Une façon d'analyser l'évolution de cette trajectoire, proposée par SHENKER, consiste à suivre l'évolution temporelle de $\phi_n - \alpha n$, c'est-à-dire l'écart de la phase par rapport à sa valeur lorsquela perturbation est nulle ($K = 0$) [8]. Nous avons reproduit sur la figure IV.26 l'état de cette trajectoire pour $K = 0.5$ et $K = 1$. Pour $K = 0.5$, cette courbe présente des déformations sur les temps longs, mais elle est lisse aux petites échelles. En effet, le spectre de puissance ne présente des raies qu'aux basses fréquences IV.27. Lorsque l'on augmente K , des perturbations de plus petite échelle apparaissent. A $K = 1$, la courbe présente des perturbations à toutes les échelles, le spectre de FOURIER comporte des pics intenses dans tout le domaine de fréquences. Cette courbe possède des détails visibles à tous les grossissements : c'est un objet fractal. Chaque échelle de perturbation correspond à la perturbation apportée par un accrochage. Un accrochage de type p/q induit q bosses dans la courbe. Au delà de $K = 1$, le tore irrationnel se déchire, il y apparait des trous, la répartition des points n'est plus uniforme, la dynamique devient chaotique.

IV.5.5 Observation expérimentale

L'observation expérimentale de la disparition d'un tore irrationnel est rendu difficile par la tendance naturelle de deux oscillateurs à s'accrocher en fréquences. Il faut en général disposer de deux paramètres ajustables jouant respectivement le rôle de K et α . Malheureusement, la situation est rarement aussi simple, et la fréquence de chacun des oscillateurs variant avec l'amplitude d'oscillation, on observe généralement une suite d'accrochages et de trajectoires irrationnelles —c'est à dire un morceau de l'escalier du diable. Pour maintenir le nombre de rotation irrationnel, la meilleure solution consiste encore à imposer de l'extérieur la fréquence perturbatrice et de maintenir le rapport à la fréquence de réponse aussi près que possible d'un nombre irrationnel. On observe alors des spectres de puissance d'une variable du système comparable à celui de la figure IV.28. Au fur et à mesure que l'on s'approche de la valeur critique du paramètre de contrôle, ce spectre s'enrichit de raies basses fréquences qui correspondent aux battements de la fréquence principale avec les différents accrochages rationnels qui approximent le nombre de rotation α . Dans le cas où $\alpha = \Omega_g$, on obtient une série de raies aux valeurs $\Omega_i = |\Omega_g - (F_n/F_{n+1})|$.

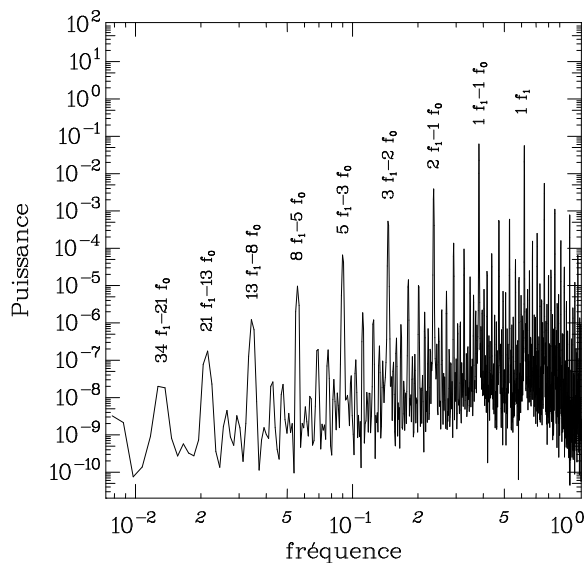


FIG. IV.28: Spectre d'un oscillateur bipériodique. Le rapport des deux fréquences est le nombre d'or Ω_g .

IV.5.6 Intermittence de type II

Lorsque le coefficient g_r de l'équation IV.12 est négatif, l'amplitude d'oscillation de la deuxième fréquence n'est plus saturée par le terme d'ordre 3 et l'on peut observer différents comportements. Les termes d'ordre plus élevé peuvent conduire à la saturation, et l'obtient une bifurcation de HOPF inverse. On peut aussi avoir un mécanisme voisin de celui de l'intermittence III : l'amplitude de la trajectoire croît et atteint un domaine chaotique qui peut la réinjecter près du point de naissance de la seconde oscillation. On observe alors des phases laminaires de signal bipériodique et des bouffées de signal chaotique. Comme la réinjection se fait près d'un point fixe instable, le comportement est semblable à celui de l'intermittence de type III ; en particulier, la distribution des phases laminaires n'est pas bornée supérieurement puisque la réinjection peut avoir lieu aussi près que l'on veut du point fixe. Cependant, celle-ci est beaucoup plus délicate car l'espace des phases est de dimension plus élevée.

A notre connaissance, il n'y a pas eu d'observation expérimentale de cette transition vers le chaos.

IV.6 Le théorème de Ruelle Takens Newhouse

En 1978, RUELLE, TAKENS et NEWHOUSE ont montré qu'un système dynamique ne pouvait pas présenter de solution stable inscrite sur un tore T^3 , c'est-à-dire ayant trois fréquences incommensurables. Plus exactement, ils ont montré qu'une telle solution ne résiste pas à des

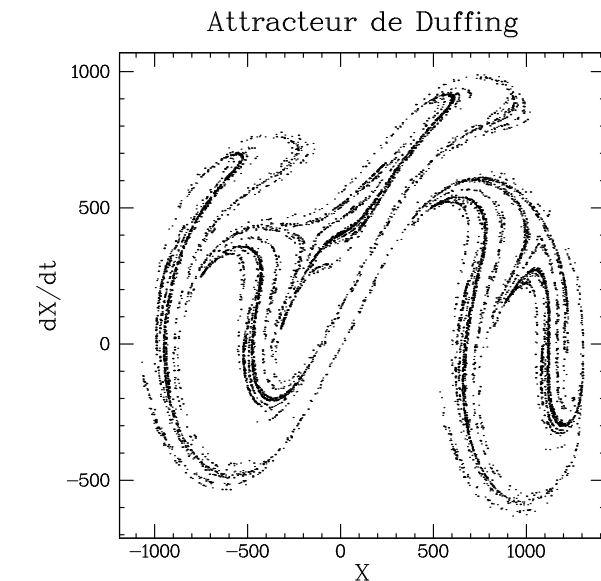


FIG. IV.29: Attracteur étrange obtenu à l'aide d'un circuit électronique représentant une particule dans un potentiel à deux puits soumise à une perturbation sinusoïdale.

perturbations infinitésimales.

Cela signifie qu'il ne serait pas possible d'observer un système dont le spectre présenterait trois fréquences incommensurables sans que celui-ci ne possède une partie bruyante correspondant au chaos. En pratique, ce théorème mathématique est difficile à vérifier car le scénario correspondant est difficile à distinguer du scénario bipériodique que nous venons de décrire. Par ailleurs, il est possible d'imaginer des perturbations douces qui ne détruisent pas le tore T^3 .

IV.7 Exposants de LYAPOUNOV et dimension fractale

Comme nous l'avons vu, le chaos déterministe se reconnaît essentiellement par la manière dont il est apparu. Mais, une fois établi, sa signature consiste en un objet de l'espace des phases que l'on appelle un *attracteur étrange*. Un exemple d'attracteur étrange est donné par la figure IV.29. Il s'agit de la coupe de POINCARÉ d'une particule dans un potentiel à deux puits soumise à une excitation périodique. Ce nom d'attracteur provient du fait que l'objet en question "attire" les trajectoires de l'espace des phases. En imposant deux conditions initiales différentes, on obtient deux trajectoires produisant des figures ayant même allure générale mais où la répartition exacte des points est différente. Quant au terme d'étrange...

IV.7.1 Exposants de Lyapounov

Les trajectoires de l'attracteur vérifient la notion de sensibilité aux conditions initiales (S.C.I.) que nous avons introduite au premier chapitre. C'est dans ce sens qu'elles sont chaotiques. On peut quantifier la sensibilité aux conditions initiales par le degré de divergence.

Considérons une itération à une dimension : $x_{n+1} = F(x_n)$, et deux conditions initiales différentes x_0 et $x_0 + \delta x_0$. La première itération conduit à : $x_1 + \delta x_1 = f(x_0) + (dF(x_0)/dx)\delta x_0$, soit $\delta x_1 = dF(x_0)/dx \delta x_0$. Après n itérations, on a :

$$\delta x_n = \left(\frac{dF^n(x_0)}{dx} \right) \delta x_0 = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{dF(x_i)}{dx} \right) \delta x_0$$

Les termes $\gamma_n = \left(\frac{dF^n(x_0)}{dx} \right)^{1/n}$ caractérisent la divergence. On définit alors l'exposant de LIAPOUNOV de l'itération par :

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dF^n(x_0)}{dx} \right|$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |F'(x_i)|$$

Si cet exposant est positif, les trajectoires divergent et la trajectoire est chaotique. On peut bien sûr étendre cette définition à une dimension plus élevée d'espace des phases, et l'on a alors un spectre d'exposants de LIAPOUNOV.

IV.7.2 Dimension d'un attracteur

Le chaos se caractérise aussi en étudiant les propriétés géométriques de l'attracteur étrange lui-même. Comme on peut le voir sur la figure IV.29, l'attracteur ne remplit pas totalement l'espace, mais se constitue d'un certain nombre de feuillettes : il s'agit d'un objet fractal [?], possédant une dimension non entière appelée *dimension fractale*. Cette notion généralise celle de dimension euclidienne. Il existe plusieurs types de dimension fractale, mais nous ne discutons ici que la dimension dite de HAUSDORFF.

Considérons le segment de droite $[0,1]$. Il faut N cube de côté d pour le recouvrir. Nous obtenons trivialement $N(d) = 1/d$. Le même calcul fait pour un carré de côté unité nous conduit à $N(d) = 1/d^2$. On définit ainsi la dimension fractale comme l'exposant D qui apparait dans la relation :

$$N = \left(\frac{1}{d} \right)^D \text{ soit : } D = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\log(N)}{\log(1/d)}$$

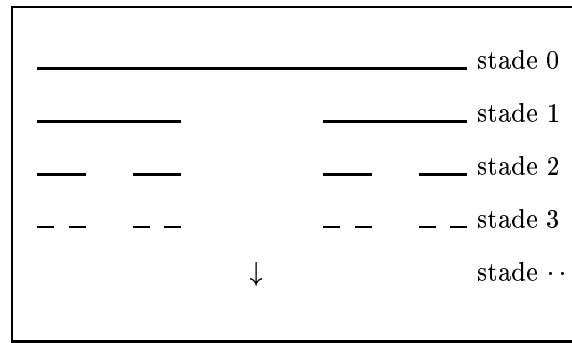


FIG. IV.30: Principe de construction l'ensemble triadique de Cantor.

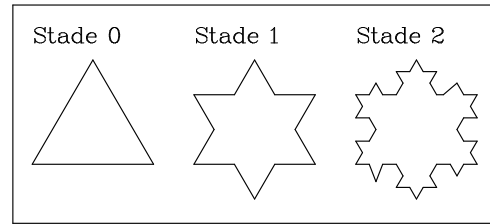


FIG. IV.31: Principe de construction de flocon de Koch.

Appliquons cette définition à un ensemble fractal construit sur le segment $[0,1]$ appelé l'*ensemble triadique de Cantor*. Cet ensemble est obtenu comme la limite d'un processus de découpage explicité sur la figure IV.30.

Au stade de construction j , il faut 2^j segments de longueur $d = (1/3)^j$ pour couvrir l'objet, donc :

$$D = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log 2^j}{\log 3^j}$$

On trouve ainsi que l'ensemble triadique de CANTOR a pour dimension fractale :

$$D = (\log 2 / \log 3) = 0.63 \dots$$

Un deuxième exemple est celui du flocon de neige construit aussi sur un procédé itératif décrit dans la figure IV.31.

Après un nombre infini d'itérations, on obtient un ensemble qui s'appelle le *flocon de Koch*. Au stade de construction j , il faut $N = 3 \times 4^j$ segments de longueur $(1/3)^{j+1}$ pour fabriquer l'objet. On obtient donc :

$$D = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log(3 \times 4^j)}{\log(3^{j+1})} \rightarrow D = \frac{\log 4}{\log 3}$$

Le calcul de la dimension fractale d'un attracteur étrange expérimental n'est pas si simple à réaliser.

Lorsque la dimension de l'attracteur est petite, la méthode de GRASSBERGER et PROCACCIA [9] donne de bons résultats.

IV.8 Exercices

IV.8.1 Itérations

On se propose d'étudier l'itération $f_r(x)$ définie entre 0 et 1 par :

$$x_{n+1} = r \left(1 - 2 \left| \frac{1}{2} - x_n \right| \right) \quad (\text{IV.16})$$

- Tracer qualitativement l'application f , pour $r = 0.4$ puis $r = 0.8$, dessiner de la même façon $f \circ f$.
- Déterminer les points fixes de f_r pour $0 < r < 1/2$, $r = 1/2$ et $1/2 < r \leq 1$. Discuter leur stabilité dans chacun des cas.
- Généraliser pour l'application f_r^n , $n \in \mathcal{N}$.
- Appliquer le critère de la sensibilité aux conditions initiales à f , qu'en concluez-vous. Peut-on quantifier ce résultat ?

IV.8.2 La bille qui rebondit

On lache une bille qui ne peut se déplacer que verticalement suivant z , elle est soumise au champ de pesanteur terrestre g et elle rebondit sur le sol (défini par $z = 0$).

Cas sans dissipation d'énergie

On suppose, dans un premier temps, que le mouvement de la bille se fait sans dissiper d'énergie.

- Combien de degrés de liberté ce système possède-t-il ?
- Sans faire de calcul, indiquez comment varie la fréquence du *toc toc* qu'elle fait en touchant le sol, en fonction de la hauteur dont elle tombe.
- Pouvez vous en déduire si le système est linéaire ou non ?
- Ecrire les équations du mouvement et tracer l'allure des trajectoires dans l'espace des phases.
- Calculer la période du mouvement en fonction de la hauteur maximale atteinte par la bille et de sa vitesse au sol.

Cas avec dissipation d'énergie

On suppose maintenant qu'il y a une perte d'énergie chaque fois que la bille entre en collision avec le sol, mais par contre, on néglige tout frottement durant la

phase de chute libre du mouvement. On écrit ainsi que la vitesse au rebond $i + 1$:

$$V_{i+1} = \gamma V_i \text{ avec } 0 < \gamma < 1$$

Coupe de Poincaré

On définit la coupe de POINCARÉ en considérant les intersections de la trajectoire avec le plan de coupe défini par $z = 0$.

- Ecrire la relation qui permet de déduire les coordonnées d'un point M_{i+1} de la section de POINCARÉ en fonction du point précédent M_i .
- Si nous définissons T_i , comme le temps mis par la bille pour aller du point M_{i-1} au point M_i , écrire la relation qui relie T_{i+1} à T_i .

IV.9 La bille qui rebondit sur un haut parleur

On fait maintenant rebondir la bille du problème précédent sur un haut-parleur animé d'un mouvement de vibration à la pulsation $\omega = 2\pi$ (la position du haut-parleur est définie en $z = 0$). Nous modélisons la membrane du haut parleur par une masse M présentant un mouvement $z = a \sin(2\pi t)$. Nous supposons que la masse de cette membrane est beaucoup plus grande que celle de la bille m ; le mouvement de la membrane n'est donc pas influencé par celui de la bille. Par contre, à chaque collision, la bille reçoit une impulsion proportionnelle à la vitesse de la membrane qui modifie la vitesse de la bille.

Le calcul exact du mouvement de la bille, sans présenter de difficultés insurmontables, est un peu délicat. Nous proposons de l'analyser avec des hypothèses simplificatrices : la difficulté du problème réel vient du fait que la bille heurte la membrane du haut-parleur à une position z qui varie dans le temps. Nous allons ici supposer que cette collision a toujours lieu à $z = 0$, ceci revient à dire que l'amplitude de vibration de la membrane est petite par rapport à la hauteur du rebond.

Cas sans frottement

En l'absence de frottement et dans l'hypothèse où la quantité de mouvement communiquée à la bille à chaque collision a la forme :

$$\delta p = m a \sin(2\pi t)$$

déterminer :

- Combien de degrés de liberté ce système possède-t-il ?

- Quelles sont les relations qui définissent M_{i+1} en fonction de M_i et T_{i+1} en fonction de T_i comme dans IV.8.2.
- Sans faire de calcul, commenter le système d'équations que vous venez de trouver : combien de fréquences sont mises en jeu, l'existence de solutions chaotiques ou régulières, le paramètre de stochasticté.
- Y a-t-il des points fixes triviaux ? si oui, à quoi correspondent-ils ?

Le cas infiniment dissipatif

Nous étudions ici un cas asymptotique difficilement réalisable mais qui permet un calcul simple. Si la dissipation tend vers l'infini, la bille ne rebondit pas sur le sol, elle perd toute son énergie cinétique à chaque collision. Pour observer un mouvement de rebond, il faut supposer que la bille reçoive une impulsion toujours positive à chaque collision. Imaginons ainsi qu'après une collision, la vitesse de décollement de la bille ait la forme :

$$V_{i+1} = \frac{g}{2} + \alpha \sin(2\pi T_i) \quad (\text{IV.17})$$

Déterminer :

- Quelles sont les relations qui définissent M_{i+1} en fonction de M_i et t_{i+1} en fonction de t_i comme dans IV.8.2, comment se simplifient-elles ?
- Quel est le point fixe du système ?
- Pour quelle valeur du paramètre de contrôle devient-il instable ? quelle est la nature de la bifurcation ?
- Quel est le scénario probable de transition vers le chaos ?

Bibliographie

- [1] P. MANNEVILLE et Y. POMEAU *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*, Communications in Mathematical Physics **74**, p. 189 (1980). P. MANNEVILLE et Y. POMEAU *Intermittency and the Lorenz model*, Physics ID-SET Paris (1981)
- [2] P. BERGÉ, M. DUBOIS, P. MANNEVILLE et Y. POMEAU *Intermittency in Rayleigh-Bénard Convection*, J. Physique-Lettres **41**, p. L341 (1980)
- [3] M.J. FEIGENBAUM *Quantitative universality for a class of non-linear transformation*, Journal of Statistical Physics, **19**, p. 25 (1978).
- [4] C. TRESSER et P. COULLET, *Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **A 287**, p. 577 (1978)
- [5] A. LIBCHABER et J. MAURER, *Une Expérience de Rayleigh Bénard de Géométrie réduite ; Multiplication, Accrochage et Démultiplication de Fréquences*, J. de Physique (Paris) Coll. **41**, C 3-51 (1980)
- [6] M. DUBOIS, A. RUBIO et P. BERGÉ *Experimental evidence s associated with a subharmonic bifurcation*, Physical Review Letters, **51**, p. 1446 (1981)
- [7] V. CROQUETTE, *Déterminisme et Chaos*, Pour la Science, décembre (1982)
- [8] S.J. SHENKER, *Scaling behavior in a map of a circle onto itself : empirical results*, Physica **5D**, p. 405, (1982)
- [9] P. GRASSBERGER, I. PROCACCIA, *Characterization of strange attractors*, Physical Review Letters, **50**, p. 346 (1983). P. GRASSBERGER, I. PROCACCIA, *Measuring the strangeness of strange attractors*, Physica **9D**, p. 189 (1983).