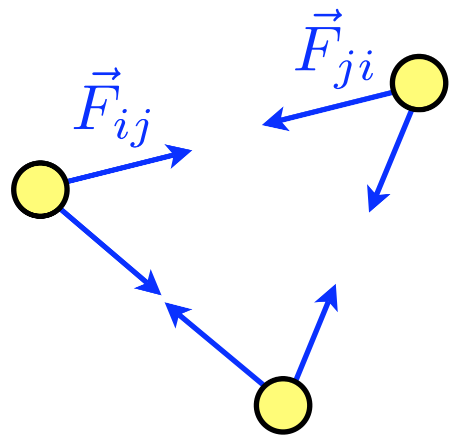
Chapitre 9 : Quantité de mouvement et collisions

1. Quantité de mouvement

- Définition : soit un système isolé de N particules en interaction



paires action-réaction

$$\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + ...\vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + ... = \vec{0}$$

$$m_1\vec{a}_1 + ... + m_N\vec{a}_N = \vec{0}$$

$$m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + ... + m_N\frac{d\vec{v}_N}{dt} = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + ... + m_N\vec{v}_N) = \vec{0}$$

Un système isolé voit sa quantité de mouvement $\sum m_i\vec{v}_i$ conservée.

- Notations : la quantité de mouvement

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

- C'est une autre façon de lire la seconde loi de Newton.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$ (si la masse est constante)

En l'absence de forces extérieures, la quantité de mouvement est constante.

2. Impulsion

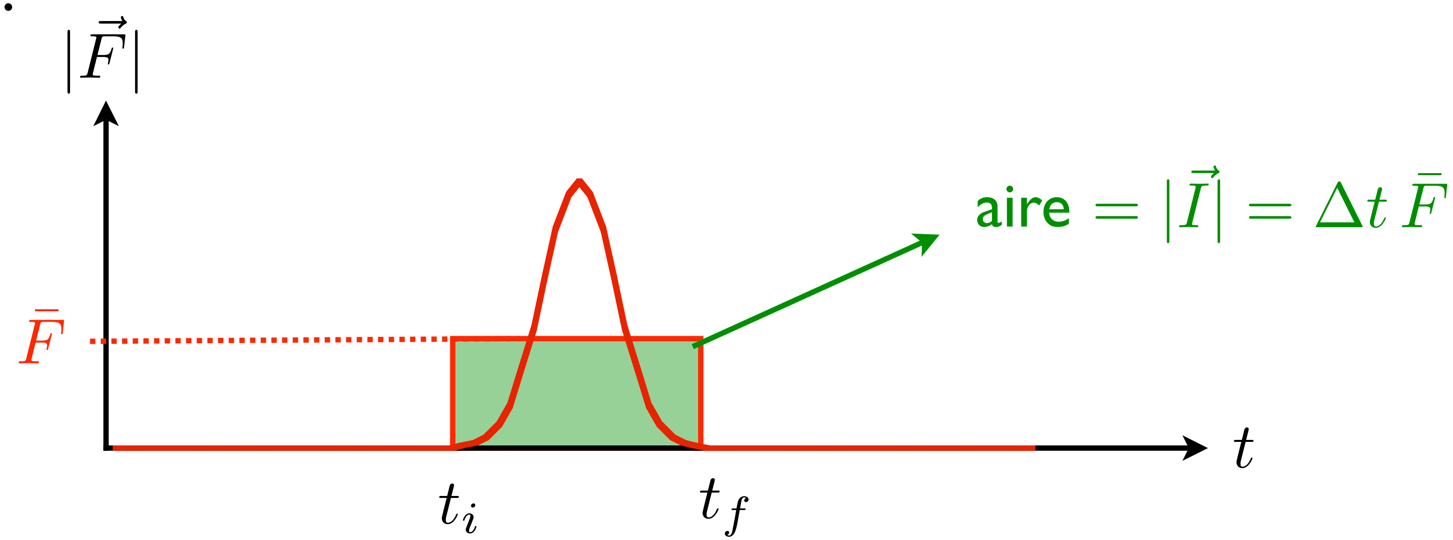
- Définition : seconde loi de Newton $$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$d\vec{p} = \vec{F}\,dt$$

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt$$

impulsion : $$\boxed{\vec{I} = \int_{t_i}^{t_t} \vec{F}\,dt}$$

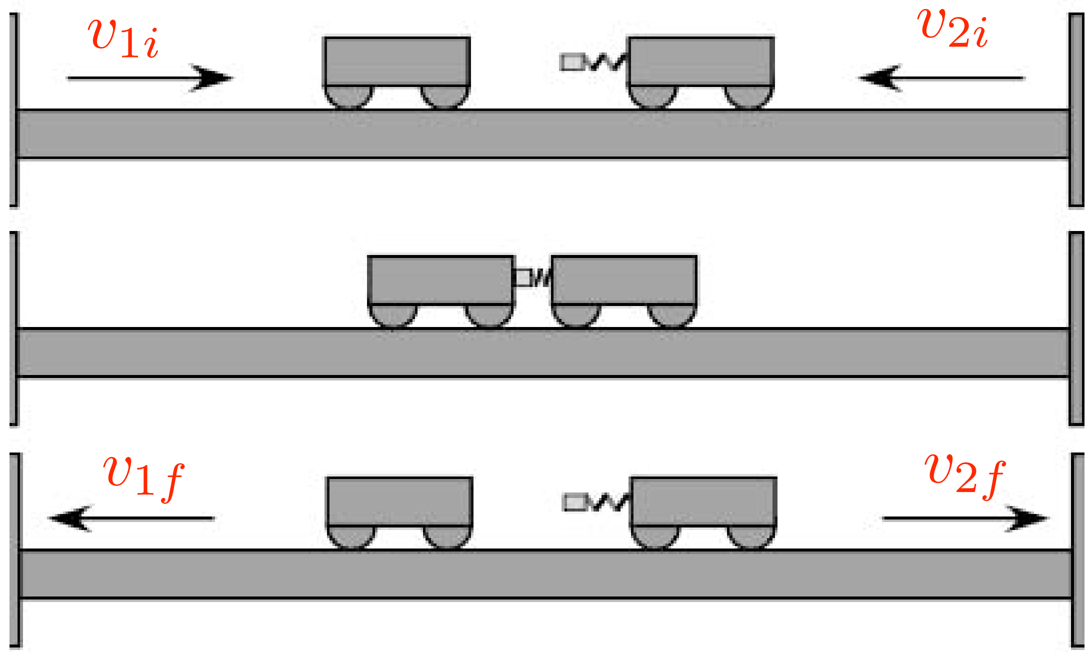
- Illustration :



• Impulsion utile dans l'étude des chocs/crashes :

3. Collisions (1d)

- Collisions élastiques : Conservation de la quantité de mouvement
  Conservation de l'énergie



$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

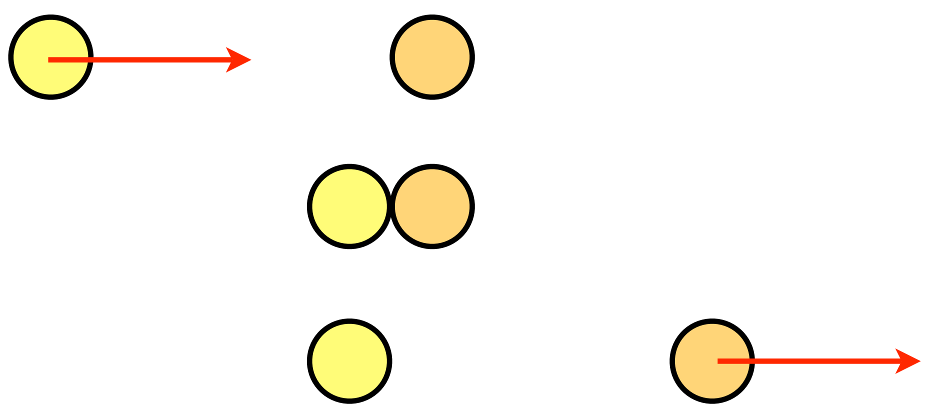
- En résolvant le système de 2 équations à 2 inconnues

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

- Pour simplifier : se placer dans le référentiel d'une bille

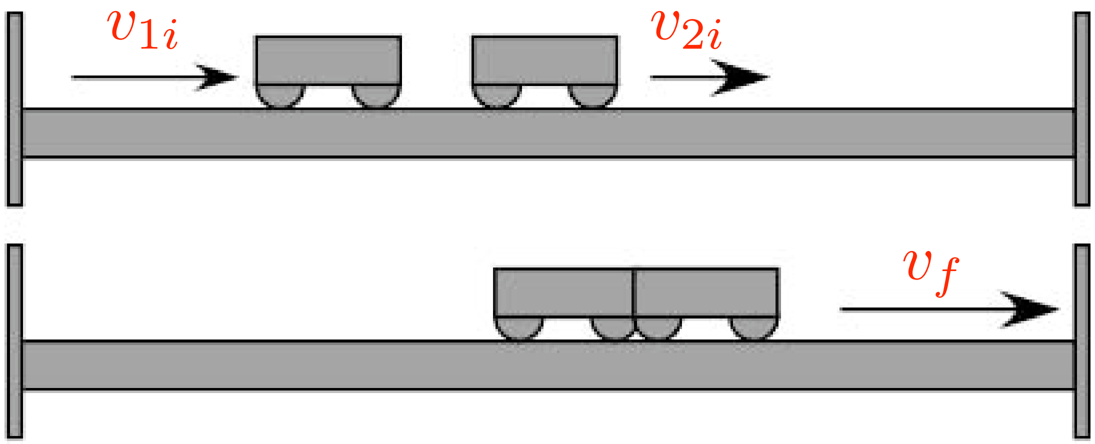
- Cas particulier : masses identiques



la première bille est stoppée, la seconde bille se met en mouvement

- Collisions inélastiques : Conservation de la quantité de mouvement
  Pas de conservation de l'énergie

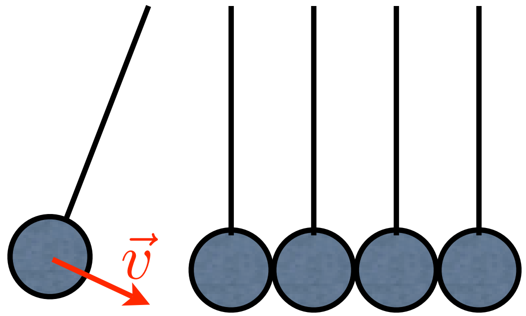
- Collisions parfaitement inélastiques :



$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

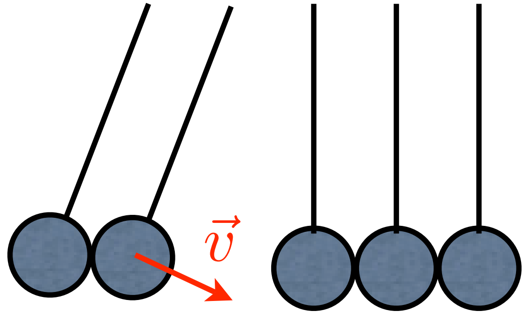
$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

- Multipendule :



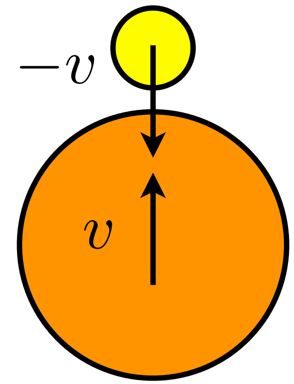
$$\begin{cases} mv = m(v_1 + v_2 + ...) \\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + ...) \end{cases}$$

ces 2 équations interdisent le mouvement de plus d'une bille !

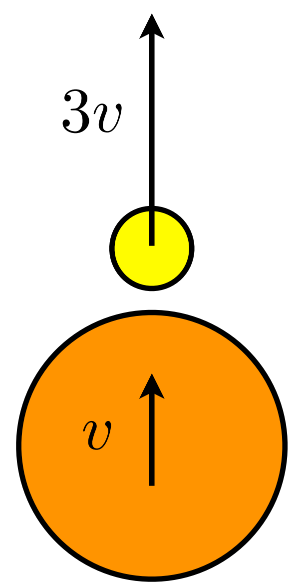


idem avec 2 billes en mouvement après collision

- Rapport de masse élevé



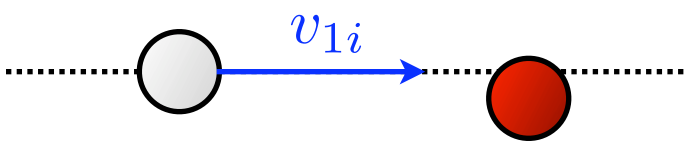
la balle de basket rebondit avant la balle de tennis.

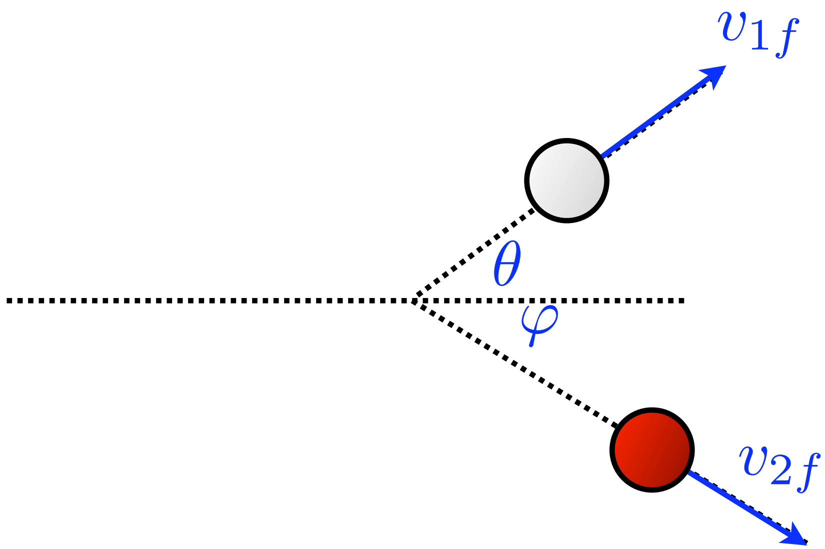


$$v_f = -\left(\frac{m-M}{m+M}\right)v + \left(\frac{2M}{m+M}\right)v$$

si $m \ll M$ alors $v_f \approx 3v$

4. Collisions (2d)





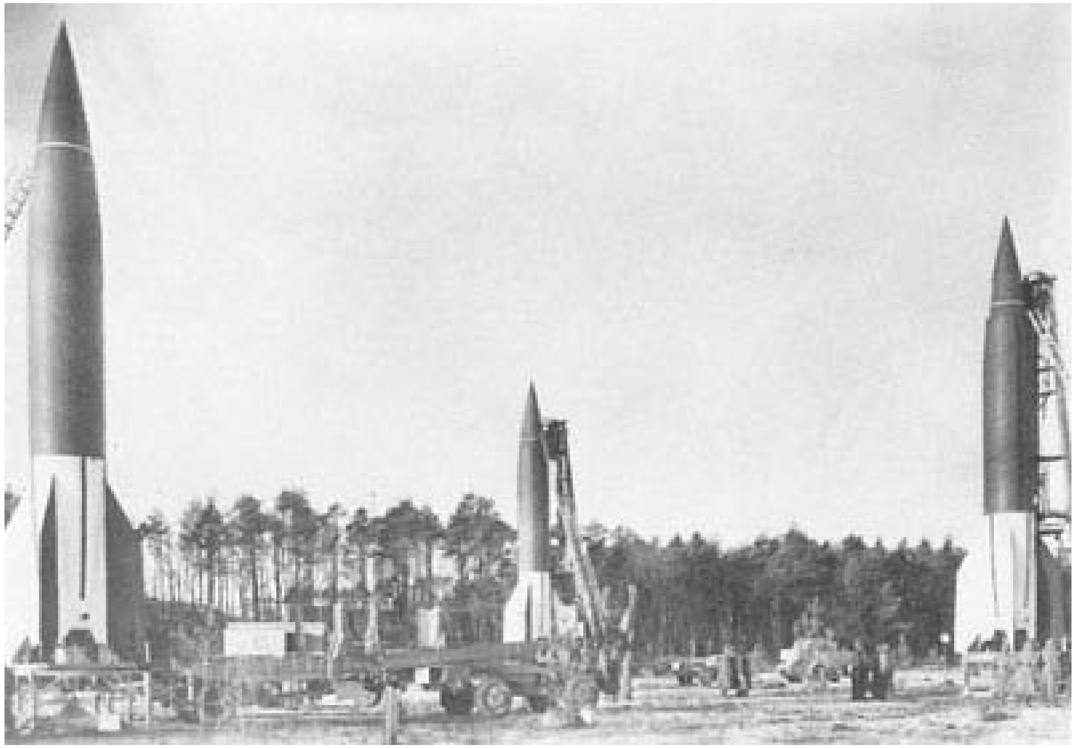
$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\varphi$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin\theta + m_2 v_{2f} \sin\varphi$$

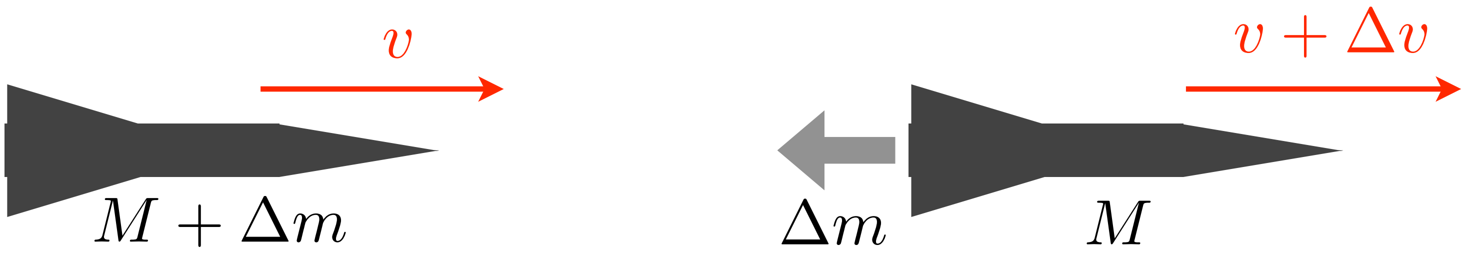
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

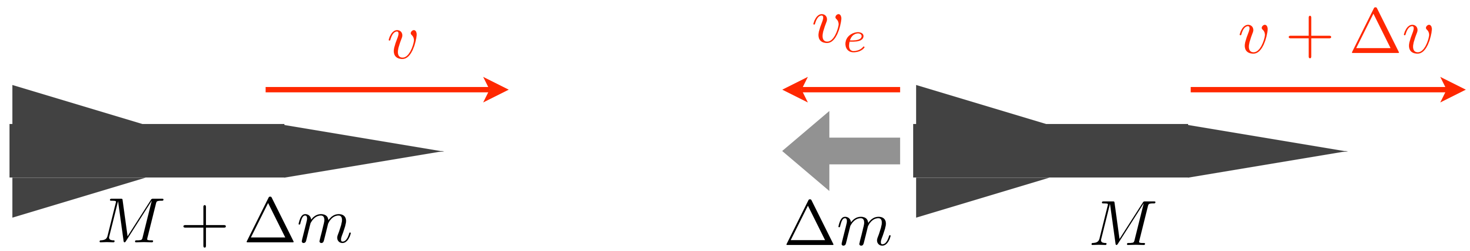
3 équations pour 4 inconnues !

5. Propulsion des fusées



Lancement de V2 (1944)





$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

$$M\Delta v = v_e \Delta m$$

$$M\,dv = v_e\,dm = -v_e\,dM$$

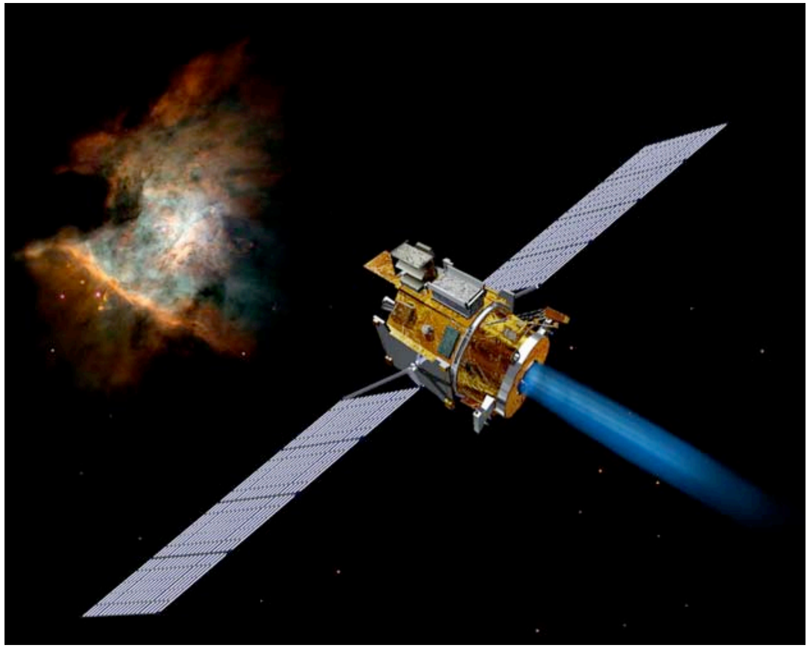
$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{1}{M}\,dM$$

$$\boxed{v_f = v_i + v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)}$$

- On définit la poussée par $M\dfrac{dv}{dt} = \left| v_e \dfrac{dM}{dt} \right|$

- Extincteur :

- Moteurs ioniques = la nouvelle génération de propulseurs



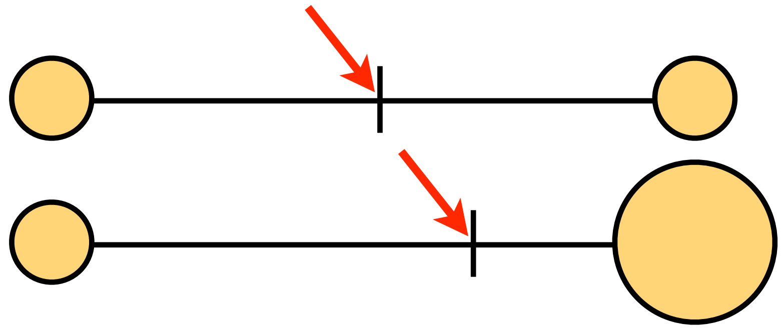
poussée = $90\,\mathrm{mN}$

Deep Space 1, NASA

6. Centre de masse

- Définition :

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}}$$



le CM du système Terre-Soleil est dans le Soleil !

- Barycentre : version mathématique (objets homogènes)

- Vitesse du centre de masse :

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{v}_i$$

$$\boxed{M\vec{v}_{CM} = \sum \vec{p}_i}$$

- Accélération du centre de masse :

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{a}_i$$

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_i$$

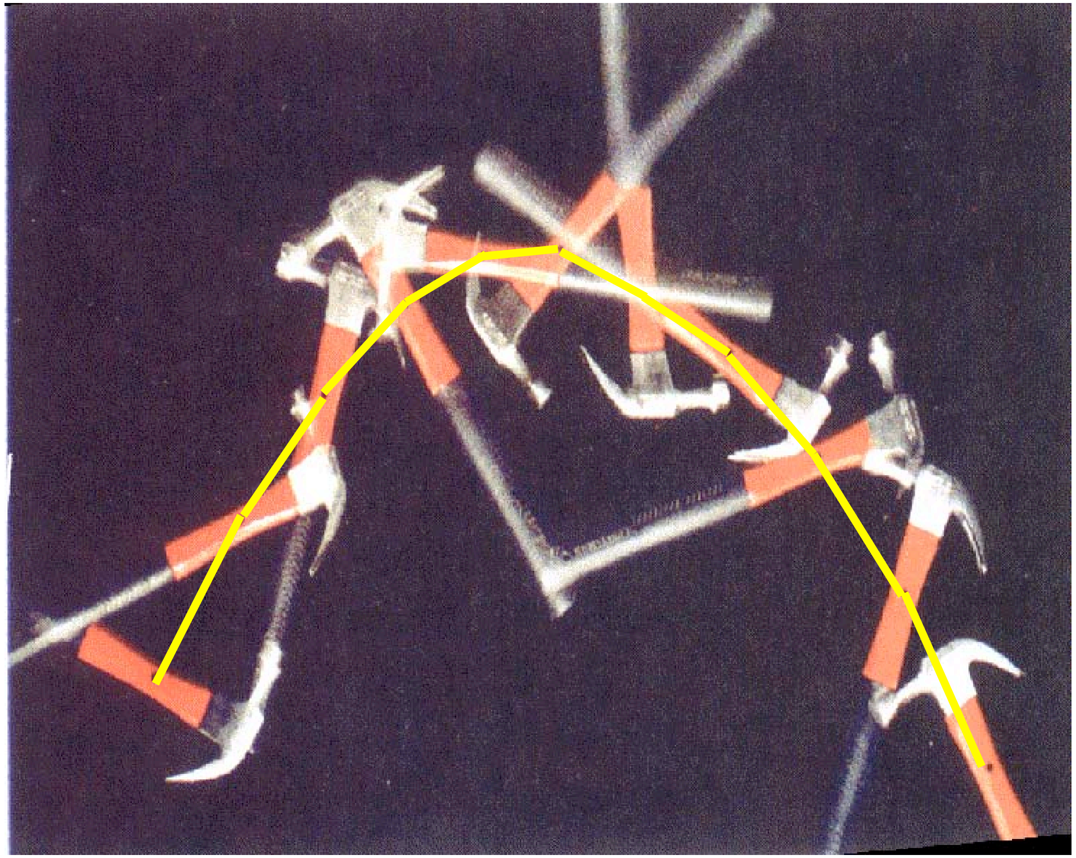
$$\vec{F}_i = \vec{F}_{int} + \vec{F}_{ext}$$

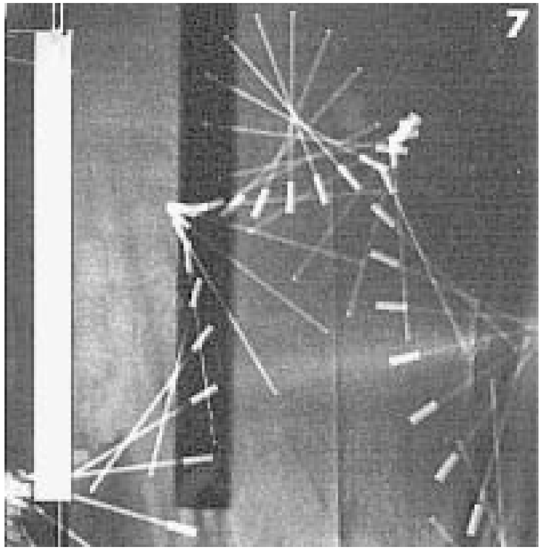
Or les forces internes sont des couples action-réaction

$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{ext}}$$

Tout se passe comme si les forces externes s'appliquent au CM.

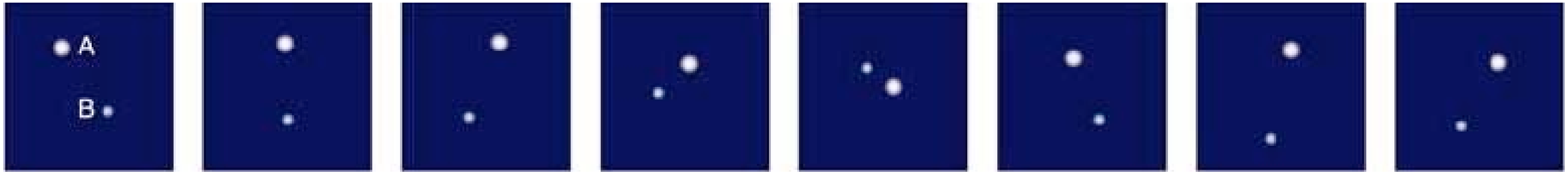
• Application : vol parabolique du CM





Bâton de majorette

• Sirius A/B :



Observations de Sirius au cours des siècles.