

# Tables des matières

---

## 1 FONDEMENTS DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

- 1.1 Cheminement des idées en optique
  - 1.1.1 Objet de l'optique
  - 1.1.2 Bref historique
- 1.2 L'optique géométrique est une approximation
  - 1.2.1 Emprunts à la théorie ondulatoire de la lumière
  - 1.2.2 Diffraction - Concept de rayon lumineux
- 1.3 Lois de l'optique géométrique
  - 1.3.1 Propagation rectiligne de la lumière
  - 1.3.2 Principe de retour inverse
  - 1.3.3 Lois de Descartes
- 1.4 LOIS DE KEPLER
- 1.5 Systèmes optiques - Objets et images
  - 1.5.1 Stigmatisme
  - 1.5.2 Nature des objets et des images

## 2 LOIS DE DESCARTES

- 2.1 COMPLÉMENTS SUR LES LOIS DE LA RÉFRACTION
  - 2.1.1 ANGLE DE RÉFRACTION LIMITE
  - 2.1.2 RÉFLEXION TOTALE
  - 2.1.3 VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE
  - 2.1.4 CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE
  - 2.1.5 RÉFRACTION DANS UN MILIEU NON HOMOGENÈME
- 2.2 MIROIRS PLANS
  - 2.2.1 DÉFINITION et RÉALISATIONS
  - 2.2.2 STIGMATISME DU MIROIR PLAN
  - 2.2.3 IMAGE D'UN OBJET ÉTENDU
  - 2.2.4 CHAMP D'UN MIROIR PLAN
- 2.3 DIOPTRE PLAN
  - 2.3.1 RECHERCHE DU STIGMATISME RIGOUREUX
  - 2.3.2 ÉTUDE DES IMAGES DANS LE CAS DU STIGMATISME APPROCHÉ

## 3 DIOPTRE ET MIROIR SPHÉRIQUE

- 3.1 DÉFINITIONS ET CONVENTIONS
- 3.2 CONDITIONS DU STIGMATISME APPROCHÉ
- 3.3 FORMULE DE CONJUGAISON AVEC ORIGINE AU SOMMET
- 3.4 FOYERS ET VERGENCE
  - 3.4.1 FOYER IMAGE
  - 3.4.2 FOYER OBJET
  - 3.4.3 POSITION DES FOYERS
  - 3.4.4 VERGENCE
- 3.5 FORMULE DE NEWTON (Formule avec origines aux FOYERS)
- 3.6 PLANS CONJUGUÉS, PLANS FOCALUX
- 3.7 GRANDISSEMENTS, FORMULE DE LAGRANGE HELMHOLTZ
  - 3.7.1 GRANDISSEMENT LINÉAIRE
  - 3.7.2 FORMULE DE LAGRANGE HELMHOLTZ
  - 3.7.3 RAPPORT DE CONVERGENCE G
  - 3.7.4 GRANDISSEMENT AXIAL g
- 3.8 MIROIRS SPHÉRIQUES
  - 3.8.1 DÉFINITIONS
  - 3.8.2 FORMULES DES MIROIRS SPHÉRIQUES

## 4 SYSTEMES CENTRÉS DIOPTRIQUES

### 4.1 GÉNÉRALITÉS

4.1.1 DÉFINITION - CONDITIONS DE L'ÉTUDE

4.1.2 CORRESPONDANCE OBJET - IMAGE : RELATION DE LAGRANGE HELMHOLTZ

### 4.2 ÉLÉMENTS CARDINAUX

4.2.1 INTÉRÊT DES ÉLÉMENTS CARDINAUX

4.2.2 FOYERS ET PLANS FOCaux

4.2.3 PLANS PRINCIPAUX

4.2.4 DISTANCES FOCales

4.2.5 APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

4.2.6 POINTS NODaux

4.2.7 CONCLUSION - CAS DU DIOPTRE SPHÉRIQUE

### 4.3 FORMULES DES SYSTÈMES CENTRÉS

4.3.1 FORMULES DE CONJUGAISON

4.3.2 AUTRES RELATIONS

4.3.3 CAS PARTICULIER: MILIEUX EXTRÊMES IDENTIQUES

### 4.4 ASSOCIATION DE DEUX SYSTÈMES CENTRÉS

4.4.1 CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES FOYERS ET DES PLANS PRINCIPAUX

4.4.2 POSITION DES FOYERS

4.4.3 CALCUL DES DISTANCES FOCales

4.4.4 FORMULE DE GULLSTRAND

## 5 LENTILLES

### 5.1 LENTILLES ÉPAISSES

5.1.1 DÉFINITIONS

5.1.2 CALCUL DE LA DISTANCE FOCale D'UNE LENTILLE

5.1.3 POSITION DES FOYERS

5.1.4 CENTRE OPTIQUE

### 5.2 LENTILLES MINCES

### 5.3 EXEMPLE DE CALCUL

## 6 L'OEIL et les instruments d'optique

### 6.1 DESCRIPTIONS ET PROPRIÉTÉS DE L'OEIL

6.1.1 DESCRIPTION COMPLÈTE : L'OEIL PHYSIOLOGIQUE

6.1.2 DESCRIPTION SIMPLIFIÉE

6.1.3 CHAMPS DE L'OEIL

6.1.4 ACCOMMODATION ET DÉFAUTS DE L'OEIL

6.1.5 GRANDEUR DE L'IMAGE RÉTINIENNE. LIMITE DE RÉOLUTION

### 6.2 PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES INSTRUMENTS D'OPTIQUE

6.2.1 CLASSIFICATION ET GÉNÉRALITÉS

6.2.2 GRANDISSEMENT, PUISSANCE ET GROSSISSEMENT

6.2.3 POUVOIR SÉPARATEUR

## 7 LOUPES, OCULAIRES, MICROSCOPES

### 7.1 LOUPES

7.1.1 LATITUDE DE MISE AU POINT

7.1.2 PUISSANCE

### 7.2 OCULAIRES

7.2.1 CLASSIFICATION ET DESCRIPTION DES OCULAIRES

7.2.2 EXEMPLE : OCULAIRE 3, 2, 1 D'HUYGENS

### 7.3 MICROSCOPES

7.3.1 DESCRIPTION GÉNÉRALE

7.3.2 PUISSANCE, GROSSISSEMENT, LATITUDE DE MISE AU POINT

7.3.3 POSITION DE L'OEIL - CERCLE OCULAIRE

7.3.4 POUVOIR SÉPARATEUR

# Chapitre 1

## FONDEMENTS DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

### 1.1 Cheminement des idées en optique

#### 1.1.1 Objet de l'optique

L'optique s'intéresse principalement à l'ensemble des phénomènes perçus par l'œil. La cause de ces phénomènes est la LUMIÈRE. Celle-ci est émise par la matière dans certaines conditions et se manifeste par son action sur divers récepteurs :

l'œil,

la plaque photographique : elle amorce une transformation chimique de sels comme les halogénures d'argent.

une lame métallique noircie : celle-ci s'échauffe ce qui montre que la lumière transporte de l'énergie(utilisée, par exemple, dans les chauffe-eau solaires).

certains métaux ou semi-conducteurs : ils émettent des électrons par effet photoémissif utilisé, par exemple, dans les tubes photomultiplicateurs, dans les tubes vidicon ou orthicon des caméras de télévision, ou sont le siège, par effet photoélectrique de la création de paires électron-trous utilisées dans les dispositifs à transfert de charges (C.C.D.) des caméscopes modernes ou dans les photopiles.

Alors même que l'oeil ne perçoit plus rien, certains récepteurs donnent lieu à des phénomènes analogues à ceux observés lorsqu'ils sont éclairés en lumière visible(échauffement, réactions photochimiques, photo émission ...). Cette partie non visible à l'oeil de l'optique couvre les domaines de lumière INFRAROUGE et ULTRAVIOLET.

#### 1.1.2 Bref historique

La lumière a été étudiée très tôt dans l'histoire des sciences, tant du point de vue de sa propagation que du point de vue de sa nature.

Au Ier SIECLE les lois de la réflexion par un miroir étaient connues des Grecs. HERO d'ALEXANDRIE affirmait qu' "un rayon lumineux quittant un point S, puis se réfléchissant sur un miroir pour parvenir à un point M, parcourt dans l'espace le plus court chemin possible".

Au siècle de Syracuse, ARCHIMEDE utilisait des miroirs paraboliques pour incendier les navires ennemis.

Au XVIIe SIECLE furent établies les lois de la réfraction (passage de la lumière à travers deux milieux transparents différents: air/eau, eau/verre ...).

•

○

- 1621 Découverte des lois par SNELL (qui ne les publie pas).
- 1637 DESCARTES retrouve indépendamment les mêmes lois et les publie.
- 1657 FERMAT retrouve ces lois à partir du principe selon lequel la lumière met un temps minimal pour aller d'un point à un autre. Comme celles de la mécanique, les lois de l'optique géométrique se présentent alors sous forme variationnelle.

C'est un peu plus tard qu'apparurent les premières hypothèses relatives à l'aspect ONDULATOIRE de la lumière.

- - - 1665 HOOKE émet l'idée que la lumière est une vibration de haute fréquence qui se propage (voir annexe 1 pour la représentation d'une onde). Cette idée est développée par HUYGENS mais contrariée par NEWTON qui défend une théorie CORPUSCULAIRE. Dans son ouvrage "La théorie de l'émission", NEWTON suppose que "la lumière est constituée par des grains de nature non précisée lancés à très grande vitesse par l'objet lumineux et qui frappent le fond de l'œil".

Au début du XIXe SIECLE, YOUNG reprend la théorie ondulatoire pour étudier les phénomènes d'interférences.

- - - 1818 FRESNEL réalise la synthèse des idées de HUYGENS et de YOUNG pour expliquer la diffraction, c'est-à-dire la présence de lumière dans les zones d'ombre géométrique. Selon FRESNEL "la lumière est propagée par le mouvement vibratoire de l'éther". Sous l'action de certains ébranlements, l'éther devient le siège de vibrations transversales se propageant de proche en proche".
    - 1880 MAXWELL après avoir construit la théorie électromagnétique conclut que la lumière est une onde électromagnétique caractérisée par une vibration dont la fréquence  $\nu$  14 Hertz et qui se propage dans le vide à une vitesse  $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ . Il précise que l'onde est transversale, c'est-à-dire que les grandeurs physiques qui la caractérisent: le champ électrique  $\vec{E}$  et le champ magnétique  $\vec{B}$ , sont perpendiculaires à la direction de propagation.

Enfin au XXe SIECLE :

- - - 1905 EINSTEIN fait subir une révolution à l'Optique en réintroduisant l'aspect corpusculaire. Pour expliquer l'effet photo émissif il fait intervenir le photon. Dans cette logique est établie la théorie quantique de l'émission: les atomes excités par suite de collisions se désexcitent en émettant des photons.
    - 1924 Louis de BROGLIE postule la dualité onde corpuscule et relie les aspects ONDULATOIRE et CORPUSCULAIRE en posant que l'énergie E du photon vaut:  $h\nu$ -34 J s est la constante de PLANCK. De sorte que pour la lumière visible l'énergie d'un photon vaut quelques électron. Volts puisque  $1\text{eV} = 1.60217733 \times 10^{-19}\text{J}$ .

## 1.2 L'optique géométrique est une approximation

### 1.2.1 Emprunts à la théorie ondulatoire de la lumière

#### Grandeurs caractéristiques de l'onde lumineuse

On établit théoriquement et expérimentalement (à l'aide d'un prisme ou d'un réseau) que toute onde lumineuse peut être considérée comme la superposition d'ondes sinusoïdales monochromatiques, c'est-à-dire

d'une seule couleur, de la forme:  $\psi(\vec{r}, t)$  ou plus simplement  $\psi$

A est une constante qui désigne l'amplitude de l'onde\*.

$\omega-1$  . La fréquence correspondante  $\nu$  et est exprimée en Hz.

$v$  est la vitesse de propagation dans le milieu considéré. Dans le vide cette vitesse est  $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

La période  $T$  est égale à  $\frac{1}{\nu}$

On définit la longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide comme la distance parcourue dans ce cas par la lumière pendant une période :  $\lambda_0 = c \cdot T$ .

La longueur d'onde  $\lambda$   $T = \frac{\lambda_0}{n}$  .

Dans le domaine visible on retiendra que pour  $\lambda_0 = 600\text{nm}$ ,  $\nu = 5 \times 10^{14}\text{Hz}$ . Le tableau ci-après indique les correspondances entre les longueurs d'ondes dans le vide et les couleurs :

$\lambda_0$ en nm	< 400	500	590	630	> 700
Domaine	ULTRAVIOLET $\Leftarrow$		Visible	$\Rightarrow$	INFRAROUGE
Couleur		bleu	jaune	rouge	

De nombreuses sources de lumière comme le soleil ou la lampe à filament de tungstène émettent de la lumière "blanche" qui couvre tout le spectre visible. Les corps qui reçoivent cette lumière : soit la réfléchissent sans filtrage et paraissent blancs, soit absorbent plus ou moins certaines longueurs et sont vus avec la couleur des longueurs d'onde réfléchies, soit absorbent tout le spectre et apparaissent noirs.

### Indice d'un milieu

Un milieu est homogène s'il a les mêmes propriétés en tout point.

Un milieu est isotrope si les propriétés observées en un point ne dépendent pas de la direction d'observation.

Par définition: l'indice  $n$  d'un milieu est égal au rapport de la vitesse  $c$  de la lumière dans le vide à la vitesse  $v$  de la lumière dans ce milieu.

Pour l'air,  $n = 1,000293 \approx 1$

## 1.2.2 Diffraction - Concept de rayon lumineux

### Mise en évidence de la diffraction

On considère un faisceau de lumière qui tombe sur un diaphragme  $D$  perpendiculairement à celui-ci. (il s'agit par exemple du soleil éclairant un trou d'aiguille dans un carton dont le plan est perpendiculaire à la direction du soleil ou d'un laser éclairant une fente).

Avec un diaphragme de grande dimension on obtient sur un écran d'observation une tache lumineuse représentative du faisceau découpé par le diaphragme. Par contre, si on réduit l'ouverture, on peut observer de la lumière en dehors du cylindre s'appuyant sur les bords du diaphragme. C'est le phénomène de diffraction parfaitement analysable en optique ondulatoire et schématisé sur [2](#)

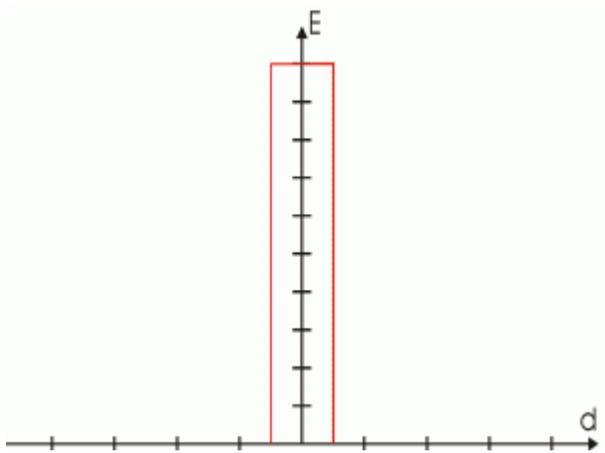


Figure 1: Trou de grande dimension et cas idéal

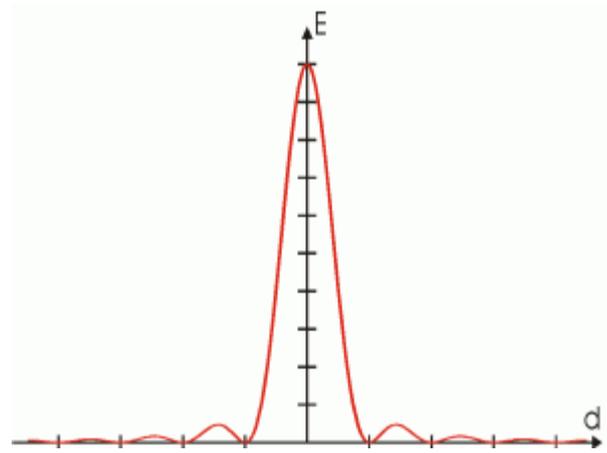


Figure 2: Trou très petit : diffraction

Ce phénomène est également observable pour les ondes mécaniques créées à la surface du liquide d'une "cuve à onde" ou sur la mer à l'entrée d'un port. C'est la diffraction due à la limitation matérielle de l'étendue d'une onde. La diffraction ne s'observe facilement que si la dimension du diaphragme n'est pas trop grande vis-à-vis de la longueur d'onde.

### Rayon lumineux

Si on néglige la diffraction dans l'expérience précédente, l'énergie lumineuse se trouve localisée dans le cylindre limité par le trou. On appelle "RAYON LUMINEUX" la droite obtenue en réduisant les dimensions du diaphragme à un point tout en négligeant la diffraction. Le rayon lumineux s'identifie alors à la normale à la surface d'onde .

La notion de rayon lumineux est une idéalisation car on ne peut pas fermer le trou sans observer, au contraire, une augmentation de l'importance de la diffraction. Mais en optique géométrique on considère que la réalité physique d'un faisceau lumineux peut toujours être décomposée en "rayons" tant que les dimensions des ouvertures restent assez grandes.

## **1.3 Lois de l'optique géométrique**

Ces lois sont très anciennes et fondées sur des observations simples (éclipses, ombre portées ...) pour lesquelles on peut effectivement négliger la diffraction. Dans ce paragraphe elles sont énoncées comme des principes issus de l'observation. On peut les démontrer sur la base de la théorie ondulatoire de la lumière (on trouvera cette démonstration dans un cours sur les ondes).

### 1.3.1 Propagation rectiligne de la lumière

DANS UN MILIEU HOMOGENE ET ISOTROPE LA LUMIERE SE PROPAGE EN LIGNE DROITE .Un milieu est homogène si ses propriétés sont les mêmes en tout point et isotrope si elles sont, en un point donné, indépendantes de la direction d'observation.

### 1.3.2 Principe de retour inverse

LE TRAJET SUIVI PAR LA LUMIERE EST INDEPENDANT DU SENS DE PROPAGATION.

### 1.3.3 Lois de Descartes

Etablies en Angleterre par SNELL en 1621 et retrouvées indépendamment en 1637, en France, par DESCARTES d'une manière expérimentale on sait aujourd'hui qu'elles résultent de la nature ondulatoire de la lumière.

Si on considère la surface de deux milieux homogènes isotropes ce dispositif constitue un dioptre. Quand on envoie à partir d'une source située dans le premier milieu (1) un faisceau de lumière incidente, l'expérience permet de distinguer de la lumière réfléchie (celle qui revient dans le milieu (1)) et (ou) de la lumière réfractée (celle qui passe dans le milieu (2)).

Le plan d'incidence est défini par le rayon d'incidence ( $A_1I$ ) et la normale ( $IN$ ) à la surface de séparation des deux milieux au point d'incidence  $I$ . Le rayon incident fait avec la normale au point d'incidence un angle  $i_1$ , le rayon réfracté fait avec cette même normale un angle  $i_2$  et le rayon réfléchi un angle géométrique (inférieur à  $90^\circ$ ) noté  $r$ . Avec ces conventions on a :

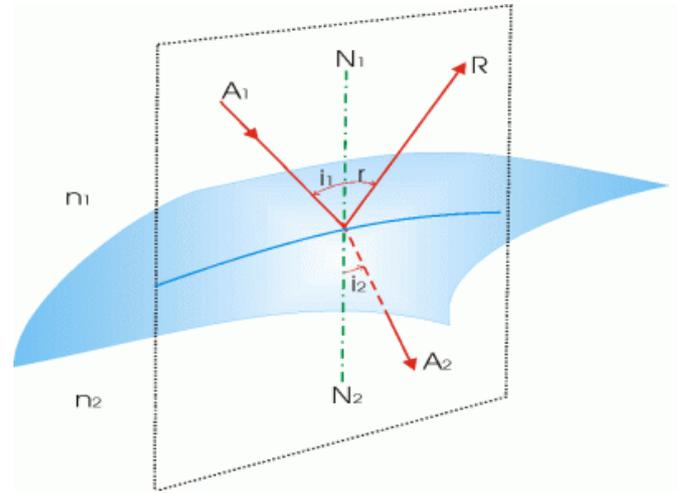


Figure 3:

#### EN RESUME :

1ère LOI : Le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le plan d'incidence.

2e LOI : Les angles d'incidence et de réflexion sont égaux et de sens contraire :

$$r = -i_1 \quad (1.1)$$

3e LOI : Pour chaque lumière monochromatique, les sinus des angles d'incidence et de réfraction sont liés par la relation :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad (1.2)$$

Remarque importante : Formellement les lois de la réflexion et de la réfraction se réduisent à  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$  si on convient de poser  $n_2 = -n_1$  pour traduire le fait que la lumière se propage en sens contraire après réflexion à la surface de séparation de deux milieux.

### 1.4 Loi de KEPLER

Au tout début du XVIIe siècle l'astronome KEPLER avait simplement posé que pour chaque couple de milieux (1) et (2) il existait un rapport constant  $n$  entre l'angle d'incidence  $i_1$  et l'angle de réfraction  $i_2$  :

$$\frac{i_1}{i_2} = n_{21} \quad (1.3)$$

Cette loi n'était que grossièrement vérifiée. Il est aujourd'hui aisé de comprendre qu'elle est une approximation des lois de Descartes, en bon accord avec l'expérience seulement si les angles sont assez petits. En effet dans ce cas on peut confondre les sinus avec les angles exprimés en radians et la troisième loi de Descartes devient très simplement :

$$n_1 i_1 = n_2 i_2 \quad (1.4)$$

Ceci permet également d'interpréter la constante  $n_{21}$  introduite par KEPLER comme l'indice relatif du milieu (2) par rapport au milieu (1) égal à  $\frac{n_2}{n_1}$ .

On peut par ailleurs remarquer que très souvent, dans la pratique, un des milieux est l'air. Dans ce cas l'indice relatif du second milieu est pratiquement égal à son indice absolu  $n$ .

## 1.5 Systèmes optiques - Objets et images

### 1.5.1 Stigmatisme

Le rôle des instruments d'optique est de permettre d'observer des reproductions appelées images, des objets, aussi fidèles que possible.

Si un système optique, c'est-à-dire, un instrument ou une partie de celui-ci fait passer les rayons issus d'un point objet  $A_o$  en un point  $A_i$ , on dit que  $A_i$  est l'image de  $A_o$ . D'après le principe de retour inverse de la lumière,  $A_i$  et  $A_o$  peuvent échanger leurs rôles c'est pourquoi on dit également que  $A_i$  et  $A_o$  sont conjugués.

Lorsque les rayons issus d'un point  $A_o$  qui entrent dans l'instrument en ressortent en passant tous par un point  $A_i$  on réalise le stigmatisme rigoureux pour le couple de points  $A_o$   $A_i$ . Cette propriété est difficile à réaliser même pour des systèmes optiques très simples. De plus, mis à part le cas du miroir plan, les surfaces correspondantes ne sont rigoureusement stigmatiques que pour un seul couple de points ce qui limite beaucoup leur intérêt pour la formation des images d'objets étendus.

Par ailleurs le stigmatisme rigoureux est un idéal qui ne tient pas compte :

- des phénomènes de diffraction qui tendent toujours à élargir l'image d'un point
- des caractéristiques du détecteur. La rétine de l'œil, par exemple est formée de cellules de quelques microns de diamètre et deux points lumineux qui sont sur la même cellule ne sont pas distingués par l'observateur.

Pratiquement on peut se contenter de systèmes optiques qui réalisent un stigmatisme approché, c'est-à-dire qui sont tels que les rayons issus d'un point  $A_o$  qui entrent dans l'instrument en ressortent en passant tous assez près d'un point  $A_i$  à l'échelle du pouvoir séparateur du dispositif d'observation (film photographique, œil ...)

### 1.5.2 Nature des objets et des images

Les objets de la vie courante sont réels. Du point de vue de l'optique, tout point d'un objet réel envoie des rayons lumineux vers la face d'entrée des instruments. Un point objet réel, pour un système optique, est situé avant la face d'entrée de celui-ci, dans le sens de propagation de la lumière.

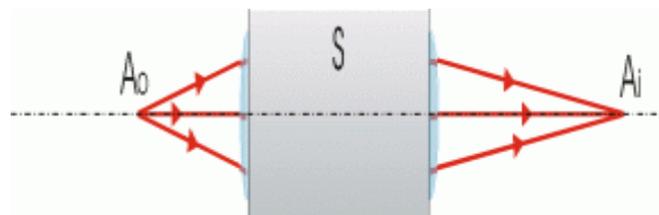


Figure 4: Objet réel et image réelle pour S

De même, les rayons émergents de la face de sortie du système optique forment une image réelle s'ils passent par "un point" situé après cette face toujours dans le sens de propagation de la lumière. Expérimentalement une image réelle peut être recueillie sur un écran.

Dans le cas où ce ne sont pas les rayons eux-mêmes mais leurs supports qui passent par "un point" en sortant de l'instrument, on dit que l'image est virtuelle. Elle ne peut pas être recueillie sur un écran.

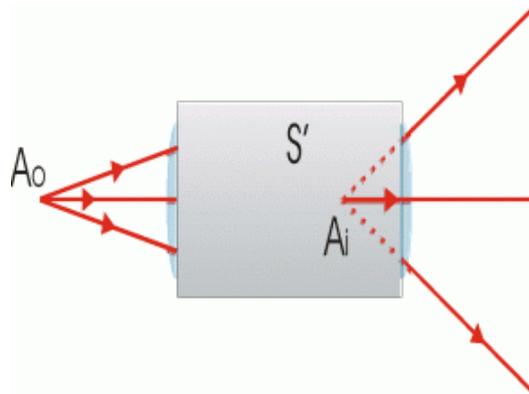


Figure 5: Objet réel, image virtuelle pour S

Il est important de bien comprendre que l'image réelle  $A_i$  donnée par le système S, comme l'image virtuelle  $A_i$  donnée par le système S' peuvent jouer le rôle d'objet réelle pour un système S'' comme le montrent les figures 6

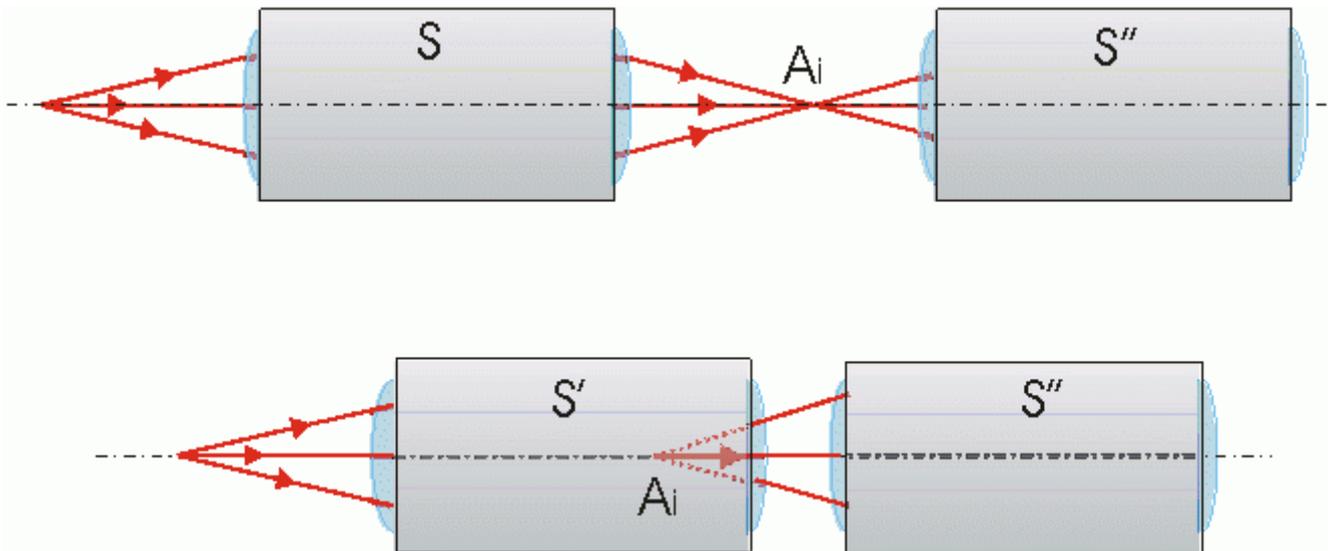


Figure 6: Dans les deux cas  $A_i$  joue le rôle d'objet réel pour S''

Enfin dans le cas où la face d'entrée d'un système comme S'' intercepte les rayons provenant d'un système donnant une image réelle, le point de convergence des supports des rayons incidents constitue un point objet virtuel pour le système S''.

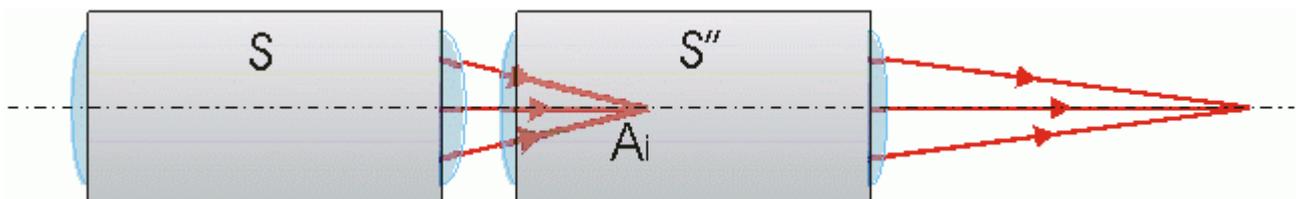


Figure 7:  $A_i$  joue le rôle d'objet virtuel pour S''

# Chapitre 2

## LOIS DE DESCARTES

Applications élémentaires

### 2.1 COMPLÉMENTS SUR LES LOIS DE LA RÉFRACTION

#### 2.1.1 Angle de réfraction limite

Si la lumière passe d'un milieu (1) moins réfringent à un milieu (2) plus réfringent, c'est-à-dire si  $n_1 < n_2$ , d'après la 3ème loi de DESCARTES on a :

$$\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \implies \sin i_2 < \sin i_1 \implies i_2 < i_1 \quad (2.1)$$

car les 2 angles sont aigus et de même signe figure 1

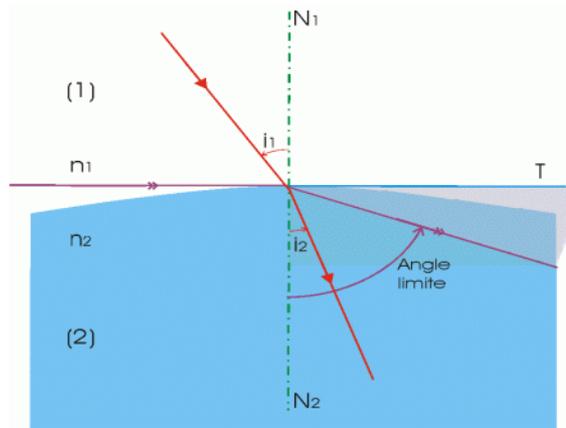


Figure 1: Réfraction sur un dioptre

A tout rayon incident  $A_1I$  correspond un rayon réfracté  $IA_2$ . Le rayon réfracté se rapproche de la normale en passant dans le milieu plus réfringent.

Pour l'incidence rasante, le rayon incident est pratiquement tangent à la surface du dioptre. Lorsque  $i_1$  varie entre  $-\frac{\pi}{2}$  à  $+\frac{\pi}{2}$ ,  $i_2$  varie entre les valeurs  $-\ell$  et  $+\ell$ .

$$n_1 \sin \frac{\pi}{2} = n_2 \sin \ell \implies \sin \ell = \frac{n_1}{n_2}$$

(2.2) Remarque : Si le milieu (1) est de l'air et si  $n$  est l'indice relatif du milieu (2) par rapport à l'air on a la formule de définition de l'angle limite qui devient simplement :

$$\text{angle de réfraction limite air/milieu : } \sin \ell = \frac{1}{n} \quad (2.3)$$

Pour étudier les variations de  $i_2$  en fonction de  $i_1$  il suffit de différentier la 3ème loi de DESCARTES :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \implies n_1 \cos i_1 di_1 = n_2 \cos i_2 di_2 \implies \frac{di_2}{di_1} = \frac{n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_2} \quad (2.4)$$

La dérivée toujours positive s'annule si  $i_1 = \frac{\pi}{2}$  et est peu différente de  $\frac{n_1}{n_2}$  si  $i_1$  est faible (loi de KEPLER) comme le montre la figure 2

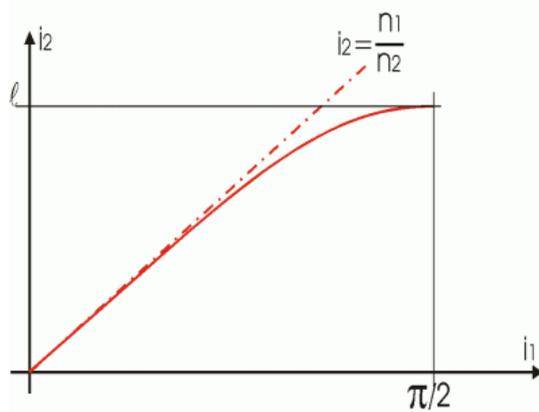


Figure 2: Cas  $n_2 > n_1$

Le tableau ci-après donne quelques valeurs de  $\ell$

Eau	Verre Crown	Verre Flint	Diamant
$n = 1.333$	$n \approx < 1.52 >$	$n \approx < 1.60 >$	$n \approx < 2.41 >$
$\ell_0$	$\ell_0$	$\ell_0$	$\ell_0$

### 2.1.2 Réflexion totale

Si la lumière passe d'un milieu plus réfringent (1) à un milieu moins réfringent (2), le rayon réfracté s'éloigne de la normale. L'angle  $i_2$  devient égal à  $\frac{\pi}{2}$  si l'angle  $i_1$  prend la valeur  $\ell'$  telle que :

$$n_1 \sin \ell' = n_2 \sin \frac{\pi}{2} \implies \sin \ell' = \frac{n_2}{n_1} \quad (2.5)$$

$\ell'$  est l'angle de réfraction limite.

D'après le principe de retour inverse de la lumière  $\ell'$  est égal à l'angle de réfraction limite  $\ell_2$  au milieu plus réfringent d'indice  $n_1$ .

Les rayons qui arrivent sous un angle d'incidence supérieur à  $\ell'$  ou inférieur à  $-\ell'$  ne peuvent pas être réfractés : ils subissent une réflexion totale et la surface de séparation des deux milieux se comporte alors comme un miroir parfait.

On peut à nouveau tracer la courbe de variation de  $i_2$  en fonction de  $i_1$  (figure 3) : la pente de la tangente à l'origine donnée par la loi de KEPLER est toujours  $\frac{n_1}{n_2}$ .

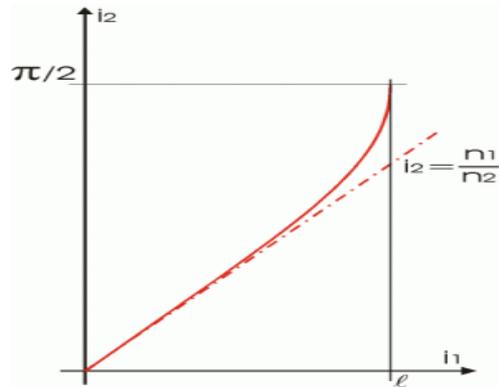


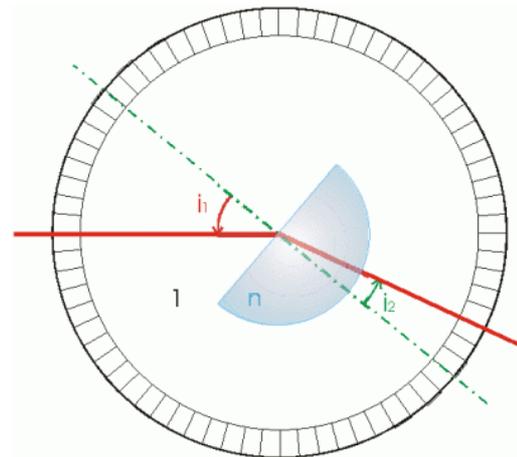
Figure 3: Cas  $n_2 < n_1$

### 2.1.3 Vérification expérimentale

#### Emploi d'un demi cylindre d'indice $n$

Dans un plan de section principale, c'est-à-dire dans un plan perpendiculaire à l'axe du demi cylindre, un faisceau étroit de lumière parallèle passe par le centre de celui-ci. Dans ce plan le " rayon lumineux " qui traverse le milieu d'indice  $n$  est confondu avec un rayon du demi cercle et est normal à la surface courbe qu'il traverse donc toujours sans déviation.

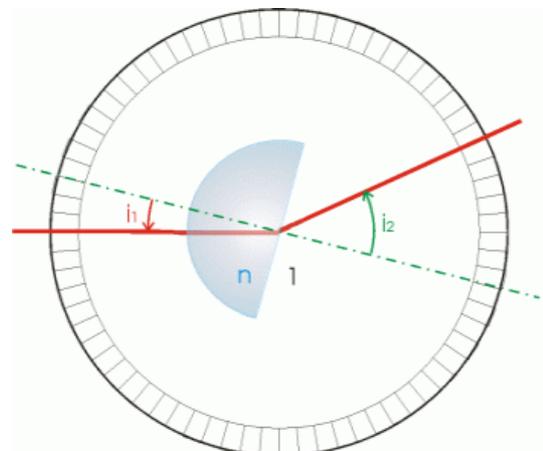
Figure 4: Passage d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent



Comme l'indique les figures 4,5 ce montage peut être utilisé aussi bien dans le cas du passage de la lumière d'un milieu moins réfringent (l'air d'indice 1) vers un milieu plus réfringent (le demi cylindre d'indice  $n$ ) que l'inverse.

Pour l'étude de l'indice d'un liquide, on peut utiliser une cuve de forme également demi cylindrique, mais en verre ou en plastique à parois minces. Il faut remarquer que si la lumière utilisée n'est pas monochromatique, on observe un étalement coloré du faisceau pour les forts angles d'incidence : ce phénomène est connu sous le nom de dispersion.

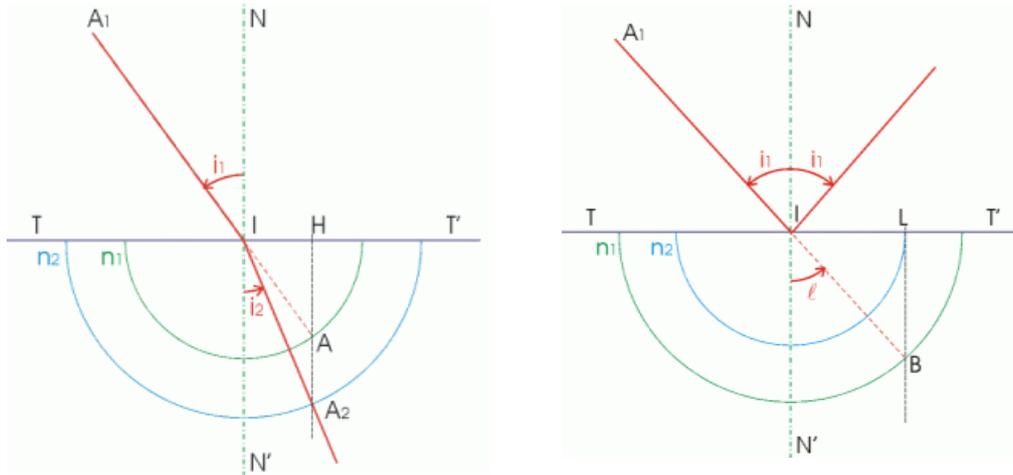
Figure 5: Passage d'un milieu plus réfringent vers un milieu moins réfringent



## 2.1.4 Construction géométrique

Méthode des surfaces d'indice.

Le plan d'incidence est pris pour plan de figure.



En prenant I, le point d'incidence, pour centre, on trace deux cercles de rayons proportionnels à  $n_1$  et  $n_2$ . Le prolongement du rayon incident  $A_1I$  coupe le cercle " de rayon  $n_1$  " en A. Si  $TT'$  est la trace du plan tangent en I à la surface de séparation des deux milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$ , la normale  $AH$  à  $TT'$  coupe le demi cercle " de rayon  $n_2$  " en  $A_2$ . Le rayon réfracté est  $IA_2$ . En effet :

$$IH = IA \cdot \sin i_1 = n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad \text{et} \quad IH = IA_2 \cdot \sin(\widehat{IA_2H}) \quad (2.6)$$

Dans le cas  $n_2 > n_1$  le cercle " de rayon  $n_1$  " est intérieur au cercle " de rayon  $n_2$  " et la construction est toujours possible.

Si, au contraire,  $n_2 < n_1$  le rayon extrême qui peut pénétrer dans le milieu d'indice  $n_2$  coupe le cercle " de rayon  $n_1$  " en un point B tel que la normale  $BH$  soit tangente au cercle " de rayon  $n_2$  ". On a ainsi construit graphiquement l'angle limite  $\ell' = \ell$

$$\sin(\widehat{LIB}) = \frac{IL}{IB} = \frac{n_2}{n_1} = \ell \quad (2.7)$$

## 2.1.5 Réfraction dans un milieu homogène

Cas d'un milieu formé de couches d'indices décroissant vers le haut

Il y a réfraction à la traversée de chacune des surfaces de séparation et le trajet de la lumière est formé d'une suite de tronçons rectilignes (figure 6) .

L'angle d'incidence augmentant à chaque fois, une réflexion totale peut se produire en J et le rayon lumineux est alors renvoyé vers les couches inférieures.

Si la variation de l'indice est continue, la ligne brisée est remplacée par une courbe.

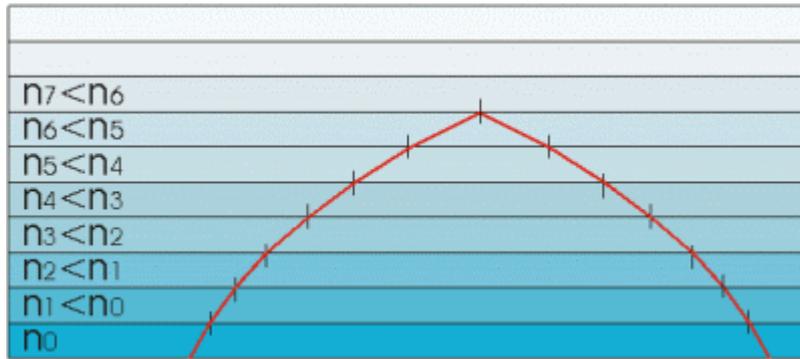


Figure 6:

### Applications

Ces propriétés sont mises à profit pour réaliser des fibres optiques schématisées figure 7 . La lumière est guidée à l'intérieur de la fibre et est intégralement transmise si le rayon de courbure n'est pas trop petit. En utilisant des fibres pour éclairer et des fibres pour regarder il est ainsi possible au médecin d'examiner ce qui se passe, par exemple, dans l'estomac d'un patient. technique connue sous le nom d'endoscopie.

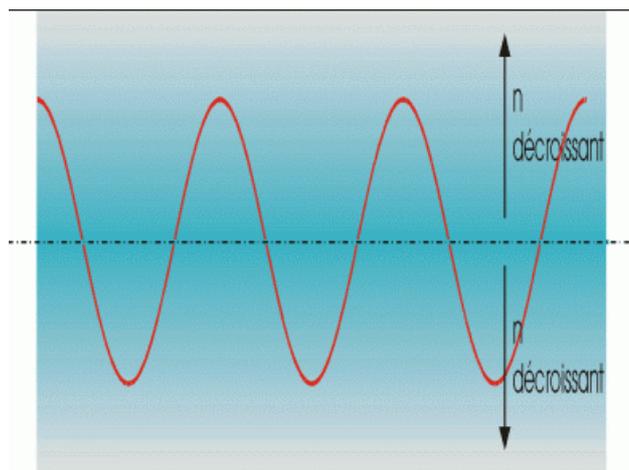


Figure 7: Principe des fibres optiques à gradient d'indice

Les mirages sont explicables quand on sait que l'indice  $n$  de l'air augmente avec sa masse volumique  $\rho$

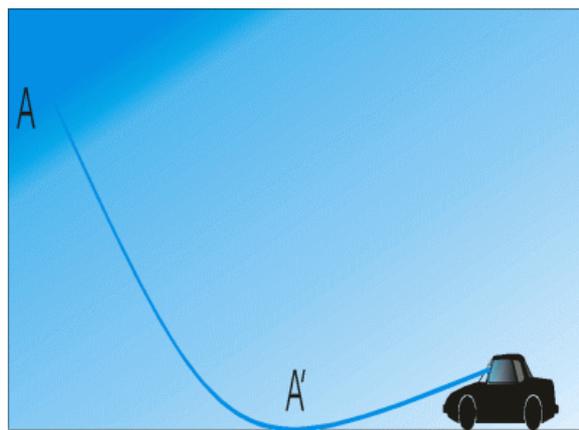
$$\frac{n - 1}{\rho} = Cte$$

(2.8) Dans une situation où le sol est très chaud, au fur et à mesure que l'on s'élève, la température de l'air décroît assez rapidement pour que la masse volumique et donc l'indice  $n$  croissent.

Dans ces conditions la lumière issue de A (figure 8), dirigée vers le bas rencontre des couches à indice décroissant.

Pour des inclinaisons convenables, elle peut subir la réflexion totale. La lumière est renvoyée vers le haut et l'œil de l'observateur O qui la reçoit situe la source sur la tangente OA' : le coin de ciel bleu A donne l'illusion de la nappe d'eau en A'.

Figure 8:



## 2.2 MIROIRS PLANS

### 2.2.1 Définition et réalisation

UN MIROIR EST UNE SURFACE CAPABLE DE RÉFLÉCHIR LA LUMIÈRE PRESQU'EN TOTALITÉ QUEL QUE SOIT L'ANGLE D'INCIDENCE.

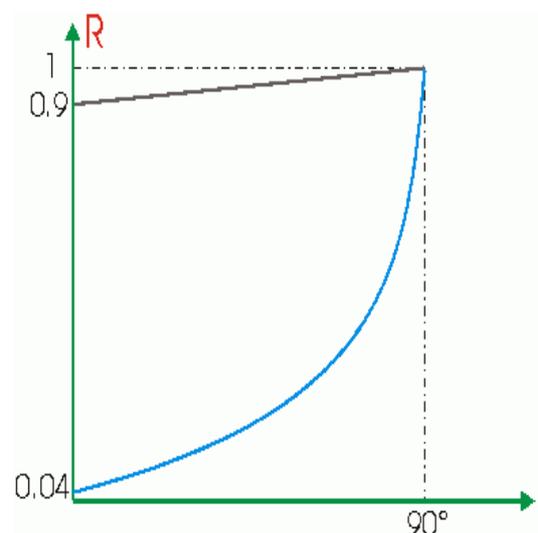
LE MIROIR EST PLAN SI LA SURFACE EST PLANE.

Le pouvoir réflecteur de la surface de séparation de deux milieux transparents, c'est-à-dire le rapport de "la quantité" de lumière réfléchi sur celle de lumière incidente varie avec l'angle d'incidence. C'est le cas de la surface air/eau d'un lac par exemple où on sait qu'on peut être ébloui par la lumière réfléchi du soleil couchant (incidence rasante proche de  $\frac{\pi}{2}$ ) mais pas par la lumière réfléchi du soleil au zénith (angle d'incidence faible). C'est aussi le cas de la surface air/verre représenté par la courbe a (figure 9). En revanche, pour les surfaces polies de certains métaux ou alliages, le pouvoir réflecteur R est élevé, de l'ordre de 0,9, même pour un angle d'incidence nul (courbe b).

On obtient des miroirs de bonne qualité en taillant une surface de verre à la forme souhaitée (plan, sphère, parabole) et en y déposant une pellicule métallique soit par voie chimique (cas des miroirs anciens à l'argent), soit par évaporation sous vide (cas des miroirs à l'aluminium ou au chrome).

Pour éviter l'altération de la couche métallique celle-ci est : soit derrière le verre et protégée par une peinture opaque dans le cas des miroirs à usage domestique (salles d'eau, magasins ...), soit sur le verre et protégée par une couche de quelques dixièmes de micron de silice, déposée par pulvérisation cathodique, dans le cas plus coûteux des miroirs de qualité "optique".

Figure 9:



### 2.2.2 Stigmatisme du miroir plan

Le rayon AH, normal au miroir, fait retour sur lui-même : l'image de A, si elle existe, est donc sur la normale.

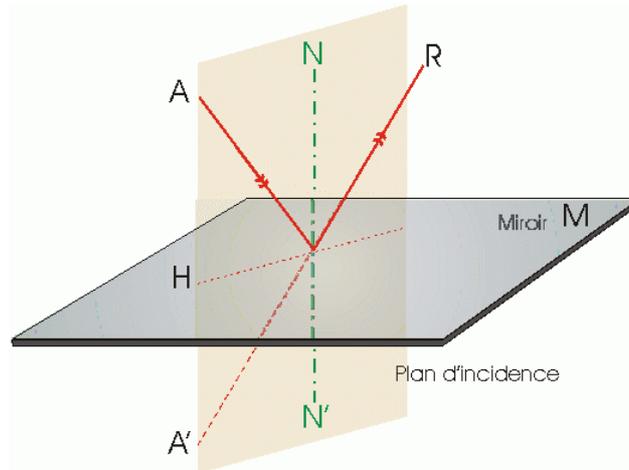


Figure 10:

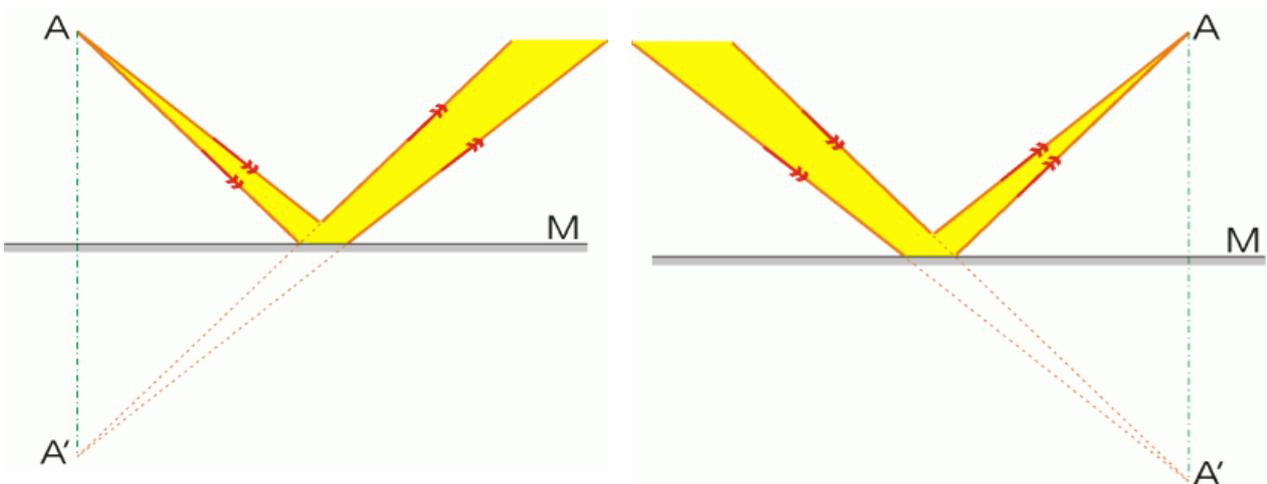
Le rayon réfléchi  $IR$  d'un rayon incident quelconque  $AI$  (figure 10) est dans le plan d'incidence  $AIN$  qui contient aussi  $AH$  (puisque  $AH$  et  $IN$  sont parallèles, comme droites perpendiculaires à un même plan, et que par définition  $A$  appartient au plan d'incidence). Le support de  $IR$  rencontre  $AH$  en un point  $A'$ .

Dans le triangle  $AIA'$  la hauteur  $IH$  est aussi la bissectrice, donc ce triangle est isocèle. Par conséquent  $IH$  est aussi la médiane et on a  $AH = HA'$ .

Ceci montre que  $A'$  est le symétrique de  $A$  par rapport au plan du miroir quel que soit le rayon incident considéré. Au point  $A$ , choisi quelconque pour la démonstration, correspond toujours un point  $A'$  tel que tous les rayons issus de  $A$  qui arrivent sur la surface du miroir se réfléchissent en passant par  $A'$ . On dit que  $A'$  est l'image de  $A$ . Elle est rigoureusement stigmatique et on peut énoncer :

**LE MIROIR PLAN RÉALISE LE STIGMATISME RIGoureux POUR TOUT POINT DE L'ESPACE. L'IMAGE  $A'$  D'UN POINT  $A$  EST LE SYMÉTRIQUE DE  $A$  PAR RAPPORT AU PLAN DU MIROIR.**

La figure ci-après montre que l'objet et l'image sont toujours de natures opposées.



### 2.2.3 Image d'un objet étendu

La propriété étant vraie pour chaque point de l'espace, l'image d'un objet étendu est le symétrique de cet objet par rapport au plan du miroir.

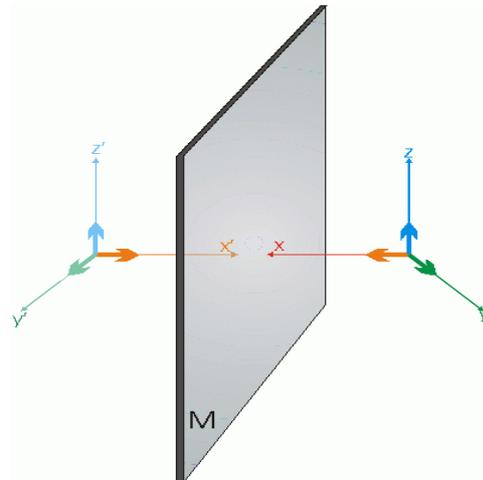


Figure 11: L'image est égale à l'objet dans toutes ses dimensions mais ne lui est, en général, pas superposable

### 2.2.4 Champ d'un miroir plan

Soit un miroir M (figure 12) ; l'oeil étant en O, les points de l'espace vus par O dans le miroir constituent le champ du miroir.

Un point A est vu si parmi tous les rayons issus de A il en existe au moins un qui, réfléchi par M, passe par O. C'est le cas de AI qui passe par l'image O' de O à travers M (l'étudiant se convaincra de ce résultat en recherchant les propriétés géométriques de la figure ou en appliquant le principe de retour inverse de la lumière).

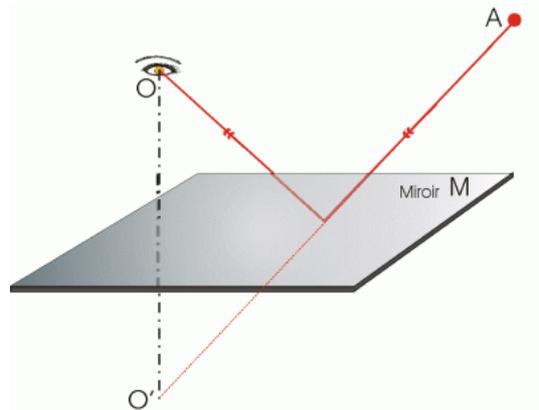


Figure 12

LE CHAMP DU MIROIR EST LIMITÉ PAR LE CÔNE DE SOMMET O' S'APPUYANT SUR LE CONTOUR DU MIROIR.

## 2.3 DIOPTRE PLAN

### 2.3.1 RECHERCHE DU STIGMATISME RIGOUREUX

UN DIOPTRE PLAN EST CONSTITUÉ PAR L'ENSEMBLE DE DEUX MILIEUX TRANSPARENTS D'INDICES DIFFÉRENTS SÉPARÉS PAR UNE SURFACE PLANE.

On dit aussi que les deux milieux sont inégalement réfringents. C'est ainsi que, par exemple, l'air et l'eau calme d'une piscine ou d'un lac, réalisent un dioptré plan.

Les rayons issus du point objet  $A_1$  situé dans le milieu (1) d'indice  $n_1$  se réfractent en passant dans le milieu (2) d'indice  $n_2$ . On cherche, en effectuant un raisonnement purement géométrique, s'il existe des points particuliers qui réalisent le stigmatisme rigoureux : c'est-à-dire pour lesquels tous les rayons issus du point objet passent par un même point après réfraction.

**A1 est à l'infini**

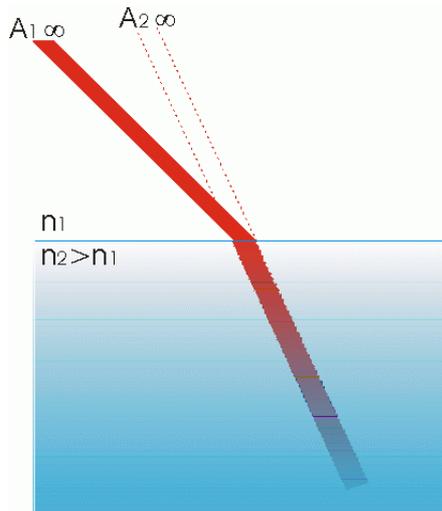


Figure 13:

Tous les rayons incidents sont parallèles entre eux et forment un faisceau cylindrique.

D'après la 3ème loi de DESCARTES :  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$  tous les rayons émergents sont eux aussi parallèles et donc, pour un observateur, ils paraissent provenir d'un point  $A_2$  unique qui est également à l'infini.

**A1 est sur la surface.**

Dans ce cas le stigmatisme rigoureux est évident. Mais ceci ne présente aucun intérêt pratique.

**A1 est à distance finie**

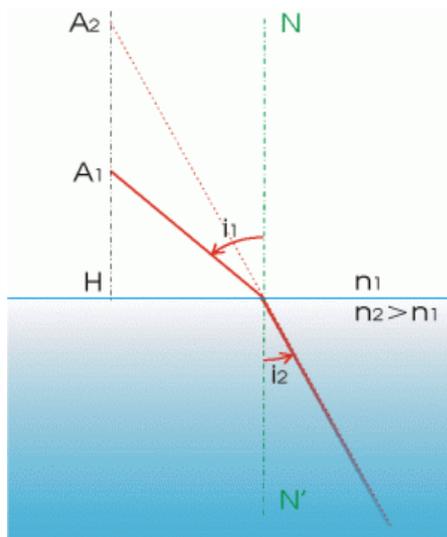


Figure 14:

Le système est de révolution autour de la normale  $A_1H$ . Le rayon  $A_1H$  traverse la surface sans déviation. Si une image de  $A_1$  existe, elle est donc nécessairement sur  $A_1H$ .

Pour dessiner la figure 14 on se place dans le plan d'incidence correspondant à un rayon incident quelconque. Le rayon réfracté coupe  $A_1H$  en  $A$ . On a :

$$\overline{HI} = \overline{HA_1} \tan i_1 = \overline{HA_2} \tan i_2 \implies \overline{HA_2} = \overline{HA_1} \frac{\tan i_1}{\tan i_2} \quad (2.9)$$

Pour les différents rayons issus de  $A_1$ ,  $i_1$  varie et  $\frac{\tan i_1}{\tan i_2}$  n'est pas constant puisque  $\frac{\sin i_1}{\sin i_2}$  l'est. Les rayons réfractés ne se rencontrent donc pas tous en un même point. On peut préciser :

IL N'Y A PAS STIGMATISME RIGoureux POUR LES POINTS A DISTANCE FINIE.

LE SEUL CAS INTÉRESSANT DE STIGMATISME RIGoureux POUR LE DIOPTRE PLAN EST CELUI DES POINTS A L'INFINI.

### 2.3.2 Etude des images dans le cas du stigmatisme approché

Si l'angle  $i_1$  est faible il en est de même pour l'angle  $i_2$  et on peut écrire :

$$\tan i_1 \approx \sin i_1 \quad \text{et} \quad \tan i_2 \approx \sin i_2 \quad (2.10)$$

On obtient alors avec une bonne approximation :

$$\overline{HA_2} = \overline{HA_1} \frac{\tan i_1}{\tan i_2} \approx \overline{HA_1} \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \overline{HA_1} \frac{n_2}{n_1} \quad (2.11)$$

Cette relation peut être mise sous la forme symétrique :

$$\frac{\overline{HA_1}}{n_1} = \frac{\overline{HA_2}}{n_2} \quad (2.12)$$

On verra lors de l'étude du dioptré sphérique qu'on peut considérer un plan comme le cas particulier d'une sphère de rayon infini et qu'on retrouve alors plus facilement la formule de conjugaison du dioptré plan sous la forme :

$$\frac{-n_1}{\overline{HA_1}} + \frac{n_2}{\overline{HA_2}} = 0 \quad (2.13)$$

Les relations établies montrent que  $\overline{HA_1}$  et  $\overline{HA_2}$  sont de même signe et donc que  $A_1$  et  $A_2$  sont dans le même milieu et, par conséquent, de natures opposées comme le montre la figure 15.

L'image  $A_2$  se déduit de  $A_1$  par une translation apparente, le long de la normale, d'amplitude :

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1H} + \overline{HA_2} = \overline{A_1H} + \overline{HA_1} \frac{n_2}{n_1} = \overline{A_1H} \left( 1 - \frac{n_2}{n_1} \right) \quad (2.14)$$

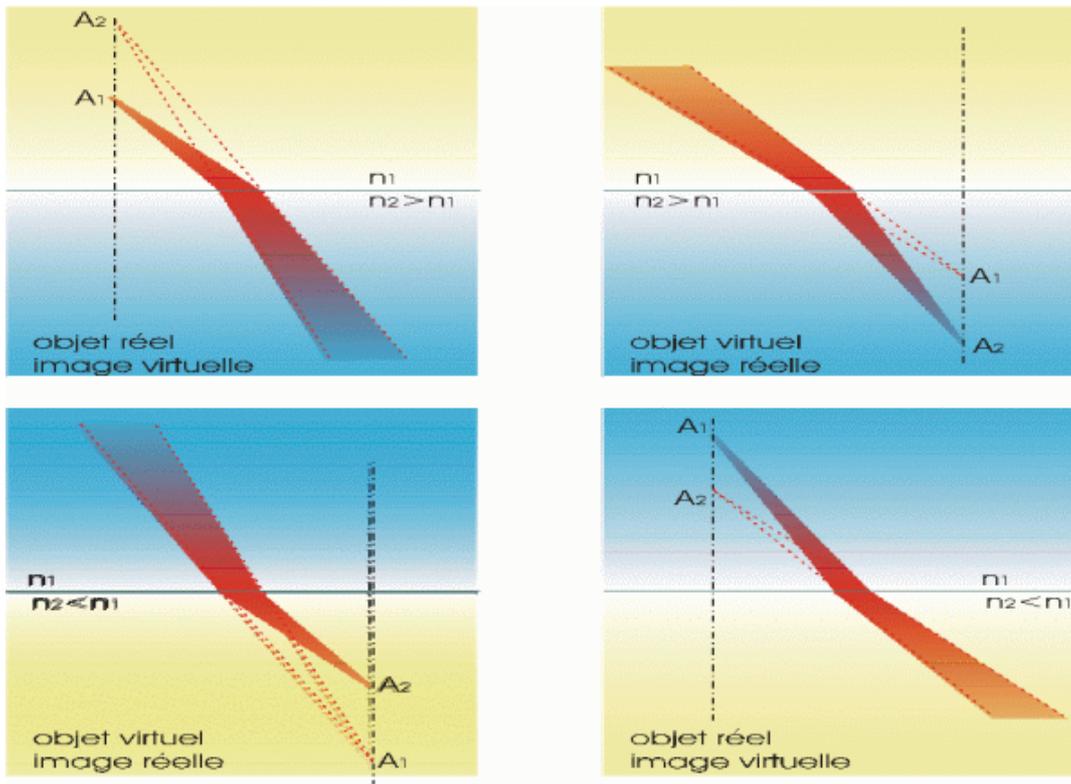


Figure 15:

Image d'un objet étendu. Si les rayons émis par un objet situé dans un plan P et reçus par un observateur sont presque normaux à la surface du dioptré son image est dans un plan P' dont chaque point  $A_2$  est l'image d'un point  $A_1$  de P située à une distance de la surface du dioptré égale à  $\frac{n_2}{n_1}$  fois celle de  $A_1$ . Si P n'est pas parallèle à la surface du dioptré, les proportions ne sont pas conservées dans toutes les directions et l'image n'est plus semblable à l'objet.

Mais, si l'objet  $A_1B_1$  est dans un plan P parallèle à la surface du dioptré (soit donc dans un plan perpendiculaire à " l'axe "  $A_1H$ ), l'image  $A_2B_2$  est, parallèle à l'objet, égale, de même sens et de nature opposée à celui-ci.

Dans ces conditions on dit que le dioptré plan réalise l'aplanétisme. L'ensemble des conditions énoncées s'appliquera à beaucoup d'autres systèmes optiques.

Le stigmatisme approché et l'aplanétisme sont réalisés pour les points voisins du point objet  $A_0$  et du point image  $A_1$  (qui sont sur l'axe sur lequel est placé l'oeil de l'observateur) pour lesquels les rayons à considérer, c'est-à-dire ceux qui traversent l'instrument et parviennent à l'observateur, sont peu inclinés sur l'axe.

Ces deux exigences :

- POINTS VOISINS DE L'AXE OPTIQUE
- RAYONS PEU INCLINÉS SUR L'AXE

constituent les conditions de l'APPROXIMATION DE GAUSS qu'on résume couramment en disant que les rayons concernés par la formation de l'image à travers l'instrument sont des RAYONS PARAXIAUX.

# Chapitre 3

## DIOPTRE ET MIROIR SPHÉRIQUE

### 3.1 DÉFINITIONS ET CONVENTIONS

Un dioptré sphérique est formé de deux milieux transparents d'indices différents  $n_1$  et  $n_2$  séparés par une surface sphérique.

Le centre et le rayon " du dioptré " sont le centre et le rayon algébrique  $R = SC$  de la sphère.

L'axe principal du dioptré est le diamètre de la sphère perpendiculaire au plan de base de la calotte sphérique utile : c'est l'axe optique.

Le pôle de cette même calotte est le sommet S du dioptré.  $\Omega$

Toutes les distances le long de l'axe optique sont mesurées algébriquement en orientant positivement cet axe dans le sens de propagation de la lumière. Dans le cas le plus usuel qui considère des rayons lumineux situés dans un plan méridien, c'est-à-dire contenant l'axe optique, on compte également algébriquement les distances des points à l'axe optique le long d'un axe directement perpendiculaire à celui-ci.

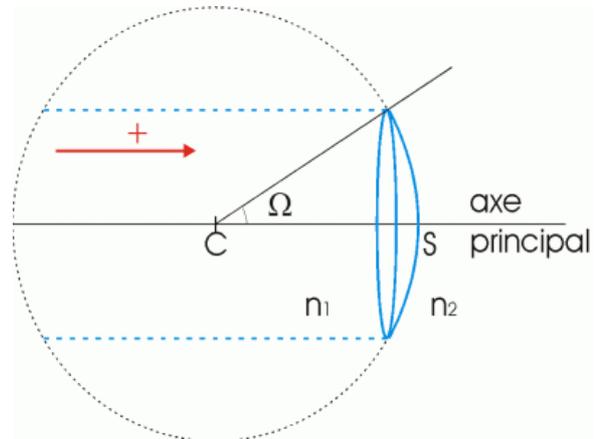


Figure 1

### 3.2 CONDITIONS DU STIGMATISME APPROCHÉ

Le stigmatisme rigoureux est réalisé pour le centre du dioptré qui est sa propre image ainsi que pour certains couples bien particuliers de points : les points de WEIERSTRASS qui ne sont pas au programme de ce cours. On admet que, comme pour le dioptré plan, le stigmatisme approché sera bien réalisé dans les conditions de l'approximation de Gauss.

Dans le cadre de cette approximation les rayons sont paraxiaux ce qui correspond aux deux hypothèses suivantes :

-1- le plan (perpendiculaire à l'axe) en I peut être confondu avec le plan tangent en S ce qui correspond à  $\delta_2$ .

-2- pour les rayons voisins de l'axe les angles  $i_1$  et  $i_2$  seront toujours petits de telle sorte qu'on pourra utiliser, si  $i$  est exprimé en radians, les égalités approchées suivantes :

$$\sin i \approx \tan i \text{ et } \cos i \approx 1$$

Mathématiquement ceci revient à se limiter aux termes du premier ordre des développements en série de Taylor pour  $\sin i$  et  $\cos i$ .

### 3.3 FORMULE DE CONJUGAISON AVEC ORIGINE AU SOMMET

On pose  $\alpha_1$  l'angle que fait la rayon incident  $A_1I$  avec l'axe optique et  $\alpha_2$  l'angle que fait, avec cet axe, le rayon réfracté correspondant. L'angle que fait  $CI$  avec  $CS$  est noté  $\theta$

Le rayon axial  $A_1C$  n'étant pas dévié l'image  $A_2$  point d'intersection des émergents sera sur l'axe. On repère la position de  $A_1$  par rapport au sommet  $S$  par  $SA_1$  et, de même, celle de  $A_2$  par  $SA_2$ . La position du rayon par rapport à l'axe au moment de la réfraction est mesurée par  $x \approx SI$ .

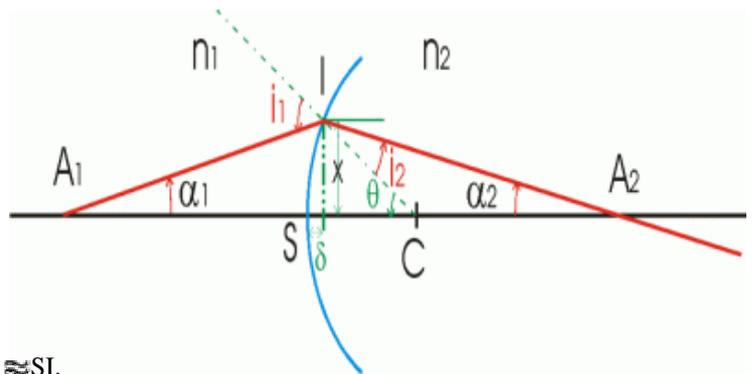


Figure 2:

Le théorème sur l'angle extérieur d'un triangle donne :

$$\begin{aligned} \text{dans } CIA_1 & : \alpha_1 + \theta = i_1 \\ \text{dans } CIA_2 & : \theta = |\alpha_2| + i_2 \end{aligned}$$

D'après la loi de Kepler :

$$n_1 i_1 = n_2 i_2$$

En combinant ces trois équations on obtient :

$$n_1 (\alpha_1 + \theta) = n_2 (\theta - |\alpha_2|)$$

d'où on tire :

$$n_1 \alpha_1 + n_2 |\alpha_2| = (n_2 - n_1) \theta$$

En remarquant que :

$$\alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = \frac{-x}{SA_1}, \quad |\alpha_2| \approx \tan |\alpha_2| = \frac{x}{SA_2} \quad \text{et} \quad \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{SC}$$

et en substituant  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\theta$

$$-\frac{n_1}{SA_1} + \frac{n_2}{SA_2} = \frac{n_2 - n_1}{SC} \quad (3.1)$$

### 3.4 FOYERS ET VERGENCE

#### 3.4.1 FOYER IMAGE

Si, dans les conditions du stigmatisme approché,  $A_1$  s'éloigne indéfiniment sur l'axe, son conjugué est, par définition, le FOYER IMAGE  $F_2$  du dioptré et  $\overline{SF_2}$  est la DISTANCE FOCALE IMAGE du dioptré. Il suffit de faire  $SA_1 = \infty$

$$\overline{SF_2} = \frac{n_2 \overline{SC}}{n_2 - n_1} \quad (3.2)$$

#### 3.4.2 FOYER OBJET

Le point image  $A_2$  est à l'infini dans la direction de l'axe optique quand le point objet est au FOYER OBJET  $F_1$  du dioptré.  $\overline{SF_1}$  est la DISTANCE FOCALE OBJET du dioptré.

En faisant  $SA_2 = \infty$

$$\overline{SF_1} = \frac{-n_1 \overline{SC}}{n_2 - n_1} \quad (3.3)$$

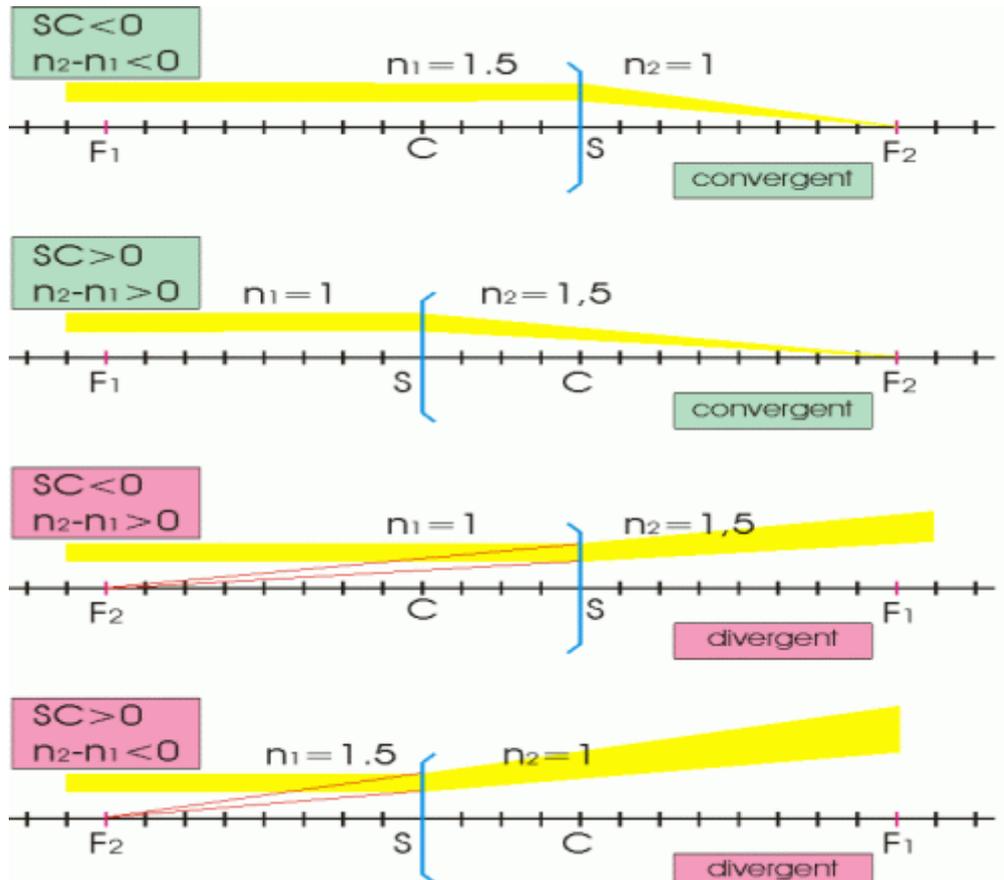


Figure 3:

### 3.4.3 Positions des foyers

Des relations précédentes on tire :

$$\overline{SF_1} + \overline{SF_2} = \overline{SC} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{SF_1}}{\overline{SF_{21}}} = -\frac{n_1}{n_2} \quad (3.4)$$

LE RAPPORT DES DISTANCES FOCALES D'UN DIOPTRE SPHÉRIQUE EST ÉGAL AU RAPPORT DES INDICES CHANGÉ DE SIGNE.

Les foyers  $F_1$  et  $F_2$  sont toujours de part et d'autre du sommet S. Si  $F_2$  est dans le milieu d'indice  $n_2$ , donc réel,  $F_1$  est dans le milieu d'indice  $n_1$ , donc également réel. De la même façon, si  $F_2$  est dans le milieu  $n_1$  il est virtuel et  $F_1$  qui est alors dans le milieu  $n_2$  est également virtuel.

LES DEUX FOYERS SONT DE MÊME NATURE: TOUS DEUX RÉELS OU TOUS DEUX VIRTUELS.

### 3.4.4 Vergence

Dans le cas où le foyer image  $F_2$  d'un dioptré est réel, tous les rayons incidents paraxiaux parallèles à l'axe convergent en  $F_2$ . Ce dioptré à foyers réels est alors dit convergent. La distance focale image  $SF_2$  est une quantité positive et on en déduit que le " rayon "  $R = SC$  et  $(n_2 - n_1)$  sont de même signe.

Par définition, la vergence  $V$  d'un dioptré sphérique est :

$$V = \frac{n_2 - n_1}{SC} = -\frac{n_1}{SF_1} = \frac{n_2}{SF_2} \quad (3.5)$$

La vergence s'exprime en DIOPTRIES (symbole  $\delta$ ) on peut aussi remarquer que le centre d'un dioptré convergent est toujours situé dans le milieu le plus réfringent.

## 3.5 Formule de NEWTON (Formule avec origines aux FOYERS)

Si on divise la relation de conjugaison avec origine au sommet par  $V = \frac{n_2 - n_1}{SC}$  on obtient :

$$\frac{-n_1 \overline{SC}}{(n_2 - n_1) \overline{SA_1}} + \frac{n_2 \overline{SC}}{(n_2 - n_1) \overline{SA_2}} = 1$$

Cette dernière relation s'écrit aussi :

$$\frac{\overline{SF_1}}{\overline{SA_1}} + \frac{\overline{SF_2}}{\overline{SA_2}} = \frac{\overline{SF_1}}{\overline{SF_1 + F_1A_1}} + \frac{\overline{SF_2}}{\overline{SF_2 + F_2A_2}} = 1$$

Dans ce cas on repère la position de l'objet  $A_1$  par rapport au foyer objet  $F_1$  et la position de l'image  $A_2$  par rapport au foyer image  $F_2$ . La relation précédente donne :

$$\overline{SF_1} (\overline{SF_2} + \overline{F_2A_2}) + \overline{SF_2} (\overline{SF_1} + \overline{F_1A_1}) = (\overline{SF_1} + \overline{F_1A_1}) (\overline{SF_2} + \overline{F_2A_2})$$

soit :

$$\overline{SF_1} \cdot \overline{SF_2} + \overline{SF_1} \cdot \overline{F_2A_2} + \overline{SF_2} \cdot \overline{SF_1} + \overline{SF_2} \cdot \overline{F_1A_1} = \overline{SF_1} \cdot \overline{SF_2} + \overline{SF_1} \cdot \overline{F_2A_2} + \overline{F_1A_1} \cdot \overline{SF_2} + \overline{F_1A_1} \cdot \overline{F_2A_2}$$

et finalement une relation parfaitement symétrique qui constitue la formule de conjugaison de Newton:

$$\overline{F_1A_1} \cdot \overline{F_2A_2} = \overline{SF_1} \cdot \overline{SF_2} \quad (3.6)$$

### 3.6 PLANS CONJUGUÉS, PLANS FOCaux

Si un point  $B_1$  est assez voisin de l'axe principal pour n'envoyer que des rayons paraxiaux, il a une image  $B_2$  située sur l'axe secondaire  $B_1C$ .

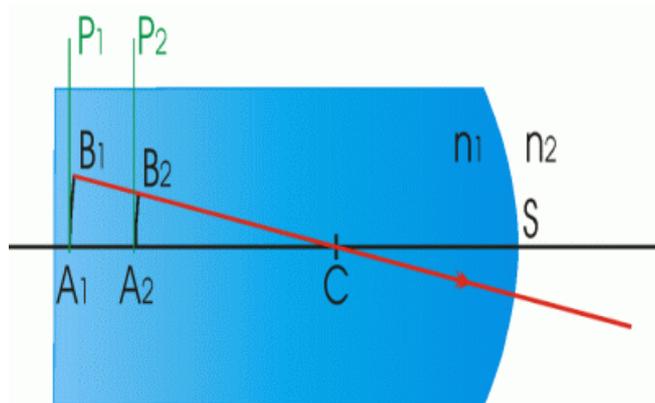


Figure 4:

Tout point tel que  $B_1$  appartenant à une portion de sphère de centre  $C$  et de rayon  $CA_1$  a une image située sur une portion de sphère de centre  $C$  et de rayon  $CA_2$ . Dans les conditions du stigmatisme approché, ces portions de sphère peuvent être assimilées aux portions des plans tangents  $P_1$  et  $P_2$  en  $A_1$  et  $A_2$ . Ces deux plans perpendiculaires à l'axe principal  $CS$  constituent deux plans "de front" conjugués.

On retrouve que le dioptre sphérique réalise l'APLANÉTISME dans les conditions de l'approximation de GAUSS.

Si l'un des deux plans conjugués est reporté à l'infini, l'autre est un PLAN FOCAL. Par exemple, le PLAN FOCAL IMAGE est le plan perpendiculaire à l'axe (principal) en  $F_2$  : ce plan est le lieu des "foyers secondaires" tels  $\Phi_2$  où convergent les faisceaux cylindriques de direction parallèle à  $C\Phi_2$ .

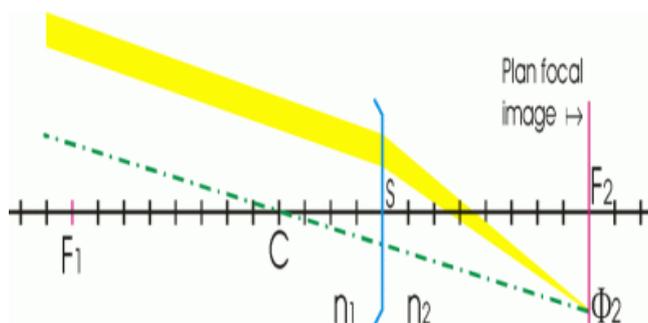


Figure 5:

N.B.1 En pratique les systèmes optiques habituels sont employés dans les conditions de l'approximation de GAUSS en limitant la surface utile des dioptres à l'aide de diaphragmes.

N.B.2 Un tel dioptre limité à une petite calotte sphérique très voisine du plan de front en  $S$  est représenté schématiquement comme le montre la figure 5. Sur une telle figure l'échelle suivant l'axe optique est différente de l'échelle dans la direction perpendiculaire à l'axe optique. La figure est dilatée suivant cette direction de telle sorte que, pour des raisons de lisibilité, les angles apparaissent beaucoup plus grand qu'ils ne sont en réalité : ceci obligera à utiliser des résultats de géométrie plane faisant intervenir les tangentes des angles mais au final on pourra remplacer ces "tangentes" par les sinus (pour exploiter les lois de Descartes) ou par les angles eux-mêmes (lois de Kepler) exprimés en radians pour les applications numériques.

### 3.7 Grandissements, Formule de LAGRANGE HELMHOLTZ

#### 3.7.1 GRANDISSEMENT LINÉAIRE ( $\Gamma$ )

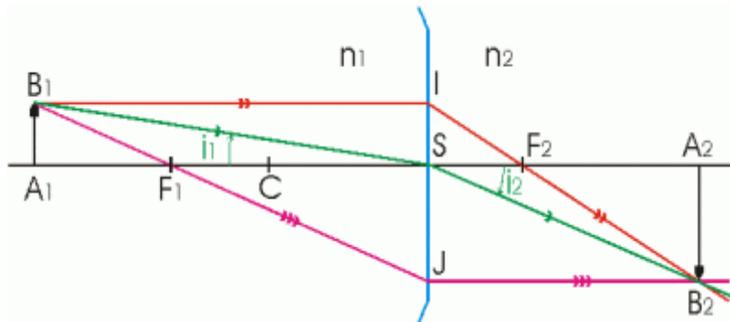


Figure 6:

Le grandissement linéaire est le rapport d'une dimension de l'image dans le plan de front en  $A_2$  à la dimension correspondante de l'objet en  $A_1$  :

$$\Gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} \quad (3.7)$$

Dans  $SA_1B_1$  on a  $A_1B_1 = SA_1 \tan i_1 = SA_1 i_1$  dans les conditions de GAUSS (avec  $SA_1 < 0$ ,  $i_1 < 0$  et  $A_1B_1 > 0$ ).

De même dans  $SA_2B_2$  on a  $A_2B_2 = SA_2 \tan i_2 = SA_2 i_2$  dans les conditions de GAUSS (avec  $SA_2 > 0$ ,  $i_2 < 0$  et  $A_2B_2 < 0$ ).

D'où l'expression de  $\Gamma$   $n_1 i_1 = n_2 i_2$  :

$$\Gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{n_1 \overline{SA_2}}{n_2 \overline{SA_1}} \quad (3.8)$$

Pour obtenir une autre expression de  $\Gamma$   $\triangle SA_2B_2$  et  $\triangle F_2SI$  sont semblables et que  $A_1B_1 = SI$ . Il vient alors :

$$\Gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{F_2A_2}}{\overline{F_2S}}$$

et finalement, puisque  $F_1A_1 \cdot F_2A_2 = SF_1 \cdot SF_2$  :

$$\Gamma = -\frac{\overline{F_2A_2}}{\overline{SF_2}} = -\frac{\overline{SF_1}}{\overline{F_1A_1}} \quad (3.9)$$

#### 3.7.2 Formule de LAGRANGE HELMHOLTZ

Soit un rayon incident quelconque  $A_1I$  : il fait l'angle  $\alpha_1$  avec l'axe principal. Dans les conditions de l'approximation de GAUSS, le réfracté correspondant passe par l'image  $A_2$  de  $A_1$  et fait l'angle  $\alpha_2$  avec l'axe principal.

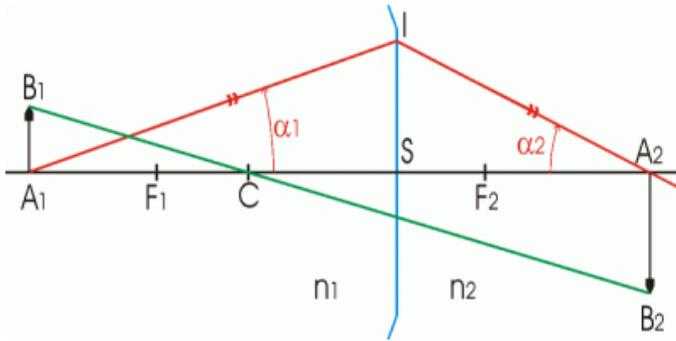


Figure 7:

Les angles  $\alpha_1 > 0$  et  $\alpha_2 < 0$ .

Sur cette figure on voit que  $-SI = SA_1 \cdot \alpha_1 = SA_2 \alpha_2$  d'où, en utilisant l'expression 3.8 du grandissement linéaire  $\Gamma$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}} = \frac{n_2}{n_1} \Gamma = \frac{n_2 \overline{A_2 B_2}}{n_1 \overline{A_1 B_1}}$$

soit :

$$n_1 \alpha_1 \overline{A_1 B_1} = n_2 \alpha_2 \overline{A_2 B_2} \quad (3.10)$$

L'égalité 3.10, connue sous le nom de relation de LAGRANGE - HELMHOLTZ, exprime évidemment la réalisation de l'aplanétisme dans les conditions simplificatrices de la limitation aux rayons paraxiaux.

N.B. l'étudiant intéressé pourra vérifier (VOIR BIBLIOGRAPHIE) qu'il s'agit du passage à la limite des petits angles d'une relation plus générale connue sous le nom de relation des sinus d'ABBE ( $n_1 \sin \alpha_1 \overline{A_1 B_1} = n_2 \sin \alpha_2 \overline{A_2 B_2}$ ).

### 3.7.3 RAPPORT DE CONVERGENCE G

Si on désigne par  $G = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$  le rapport de convergence pour le couple de points conjugués  $A_1, A_2$  on voit à partir de la relation 3.10 que :

$$G \cdot \Gamma = \frac{n_1}{n_2}$$

G et  $\Gamma$

### 3.7.4 GRANDISSEMENT AXIAL g

Si  $A_1$  se déplace de  $d(SA_1)$  sur l'axe, son image  $A_2$  se déplace de  $d(SA_2)$  sur ce même axe. Par définition, le grandissement axial est :

$$g = \frac{d(\overline{SA_2})}{d(\overline{SA_1})}$$

En différenciant la relation de conjugaison?? dont le second membre est une constante égale à la vergence du dioptre il vient :

$$\frac{n_1 d(\overline{SA_1})}{SA_1^2} - \frac{n_2 d(\overline{SA_2})}{SA_2^2} = 0$$

d'où on tire :

$$g = \frac{d(\overline{SA_2})}{d(\overline{SA_1})} = \frac{n_1 SA_2^2}{n_2 SA_1^2}$$

g est toujours positif. Par conséquent l'image se déplace dans le même sens que l'objet si celui-ci se déplace le long de l'axe.

En introduisant  $\Gamma$  (relation 3.8) il vient  $g = \frac{n_2}{n_1} \Gamma^2 = \frac{\Gamma^2}{G \cdot \Gamma}$

d'où la relation :

$$G \cdot g = \Gamma$$

Complément : FORMULES AVEC ORIGINE AU CENTRE

Dans quelques cas particuliers (lentille demi boule par exemple) il peut être très intéressant de prendre le centre C pour origine. On déduit la formule de conjugaison correspondante de la relation ?? :

$$\begin{aligned} -\frac{n_1}{\overline{SA_1}} + \frac{n_2}{\overline{SA_2}} &= \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}} \Rightarrow -\frac{n_1 \overline{SC}}{\overline{SA_1}} + \frac{n_2 \overline{SC}}{\overline{SA_2}} = n_2 - n_1 \\ \Rightarrow n_1 \left(1 - \frac{\overline{SC}}{\overline{SA_1}}\right) - n_2 \left(1 - \frac{\overline{SC}}{\overline{SA_2}}\right) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire :

$$n_1 \left(1 + \frac{\overline{CS}}{\overline{SA_1}}\right) - n_2 \left(1 + \frac{\overline{CS}}{\overline{SA_2}}\right) = n_1 \frac{\overline{CA_1}}{\overline{SA_1}} - n_2 \frac{\overline{CA_2}}{\overline{SA_2}} = 0$$

d'où on tire :

$$n_2 \frac{\overline{SA_1}}{\overline{CA_1}} - n_1 \frac{\overline{SA_2}}{\overline{CA_2}} = n_2 \frac{\overline{SC} + \overline{CA_1}}{\overline{CA_1}} - n_1 \frac{\overline{SC} + \overline{CA_2}}{\overline{CA_2}} = 0$$

soit encore :

$$n_2 \left(\frac{\overline{SC}}{\overline{CA_1}} + 1\right) - n_1 \left(\frac{\overline{SC}}{\overline{CA_2}} + 1\right) = -\frac{n_2 \overline{CS}}{\overline{CA_1}} + n_2 + \frac{n_1 \overline{CS}}{\overline{CA_2}} - n_1 = 0$$

et donc finalement :

$$-\frac{n_2}{CA_1} + \frac{n_1}{CA_2} = \frac{n_1 - n_2}{CS} = V \quad (3.11)$$

Et pour le grandissement on voit sur la figure 7 que :

$$\Gamma = \frac{CA_2}{CA_1}$$

### 3.8 MIROIRS SPHÉRIQUES

#### 3.8.1 DÉFINITIONS

Un miroir sphérique est une portion de sphère réfléchissante qui, généralement, est en forme de calotte sphérique.

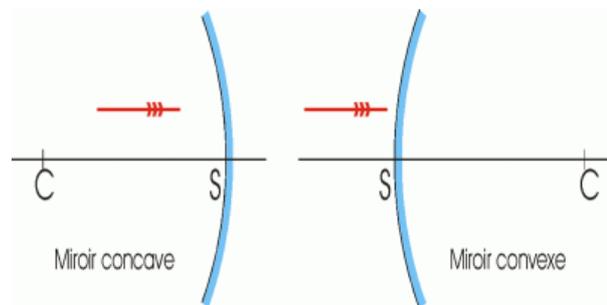


Figure 8:

L'axe principal est le diamètre de la sphère perpendiculaire au plan de base de la calotte : il passe par le centre C et le sommet S du miroir.

$\Omega$

Tout plan contenant l'axe est un plan de section principale.

Si la surface réfléchissante est du côté du centre le miroir est concave. Il est convexe dans le cas contraire.

#### 3.8.2 FORMULES DES MIROIRS SPHÉRIQUES

Elles se déduisent immédiatement de celles du dioptre sphérique si on remarque qu'on passe de la troisième loi de DESCARTES :  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ , à la seconde :  $i = -r$  en considérant que  $n_1 = +n$  lorsque la lumière se dirige vers le miroir et  $n_2 = -n$  quand se propage en sens inverse. Si A désigne un point objet et A' son image à travers le miroir on obtient sans difficultés les formules ci-après.

Formules avec origine au sommet :

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC} \quad \text{et} \quad \Gamma = \frac{SA'}{SA}$$

En faisant  $SA = \infty$   $SA' = \infty$

$$\overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2} = f \quad \text{distance focale du miroir}$$

Formules avec origine au foyer. Formules de NEWTON :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = SF^2 = f^2$$

et

$$\Gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{SF}} = -\frac{\overline{SF}}{\overline{FA}}$$

Autres résultats :

Grandissement axial

$$g = -\frac{SA'^2}{SA^2} = -\Gamma^2$$

Dans le cas d'un miroir sphérique l'objet et l'image se déplacent en sens inverse lors d'une translation sur l'axe.

Relation de LAGRANGE HELMHOLTZ

$$\overline{AB} \cdot \alpha = \overline{A'B'} \cdot \alpha'$$

# Chapitre 4

## SYSTEMES CENTRÉS DIOPTRIQUES

### 4.1 GÉNÉRALITÉS

#### 4.1.1 DÉFINITION - CONDITIONS DE L'ÉTUDE

Un système centré dioptrique est formé par une succession de surfaces planes ou sphériques séparant des milieux transparents: les centres des faces sont alignés sur un même axe qui constitue l'axe principal du système.

Sauf cas très particulier un tel système ne permet pas de réaliser le stigmatisme rigoureux : on cherche donc le stigmatisme approché en se plaçant dans les conditions de l'approximation de GAUSS.

Si ces conditions sont satisfaites, à un point OBJET correspond un point IMAGE ; un élément d'un plan de front admet une autre portion d'un autre plan de front comme image à travers le système : les deux plans sont des plans conjugués.

#### 4.1.2 CORRESPONDANCE OBJET - IMAGE : RELATION DE LAGRANGE HELMHOLTZ

L'unicité de la correspondance objet - image se met facilement en évidence dans les conditions de l'approximation de GAUSS :

- le dioptre  $D_1$  séparant les milieux d'indice  $n_0 = n$  et  $n_1$  donne de l'objet  $A$  une image  $A_1$  qui sert d'objet pour le dioptre  $D_2$ .
- le dioptre  $D_2$  séparant les milieux d'indice  $n_1$  et  $n_2$  donne de l'objet  $A_1$  une image  $A_2$  qui sert d'objet pour le dioptre  $D_3$ .
- ...
- le dioptre  $D_i$  séparant les milieux d'indice  $n_{i-1}$  et  $n_i$  donne de l'objet  $A_{i-1}$  une image  $A_i$  qui sert d'objet pour le dioptre  $D_{i+1}$ .
- ...
- finalement, le dioptre  $D_p$  séparant les milieux d'indice  $n_{p-1}$  et  $n_p = n'$  donne de l'objet  $A_{p-1}$  une image  $A'$  qui est unique.

Les rôles de  $A$  et  $A'$  peuvent être échangés par application du principe de retour inverse de la lumière.  $A$  et  $A'$  sont des points conjugués. Leur correspondance est biunivoque pour un système donné.

Après un choix convenable des origines on pourra donc toujours établir une relation de position biunivoque entre  $A$  et  $A'$ .

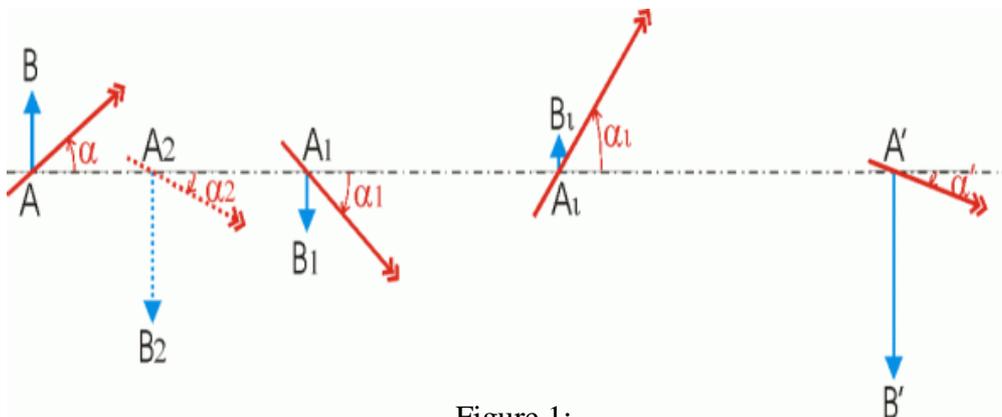


Figure 1:

L'établissement d'une relation de grandeur est immédiat : pour chacun des dioptrés constituant le système étudié, lorsque les conditions de l'approximation de GAUSS sont satisfaites, la relation de LAGRANGE / HELMHOLTZ est vérifiée. On a donc :

$$n \cdot \overline{AB} \cdot \alpha = n_1 \cdot \overline{A_1 B_1} \cdot \alpha_1 = n_2 \cdot \overline{A_2 B_2} \cdot \alpha_2 = \dots = n_i \cdot \overline{A_i B_i} \cdot \alpha_i = \dots = n' \cdot \overline{A' B'} \cdot \alpha'$$

Ceci établit la relation de LAGRANGE HELMHOLTZ où  $n$  et  $n'$  sont les indices des milieux respectivement à l'entrée et à la sortie du système centré.  $\overline{AB}$  et  $\overline{A' B'}$  sont les mesures algébriques des dimensions correspondantes de l'objet et de l'image. Enfin  $\alpha$  est l'angle que fait avec l'axe en  $A$  le rayon émergent correspondant à l'incident qui fait l'angle  $\alpha$

$$n \cdot \overline{AB} \cdot \alpha = n' \cdot \overline{A' B'} \cdot \alpha'$$

## 4.2 ÉLÉMENTS CARDINAUX

### 4.2.1 INTÉRÊT DES ÉLÉMENTS CARDINAUX

Pour certains systèmes centrés simples comme les lentilles, on peut déterminer la position et la dimension de l'image  $\overline{A' B'}$  d'un objet  $\overline{AB}$  en considérant l'action successive de chacun des dioptrés. Mais, plus souvent, on a intérêt à utiliser des points ou des plans possédant des propriétés particulières permettant de construire de façon simple certains rayons réfractés. Ces points et ces plans constituent les éléments cardinaux du système.

Il faut bien remarquer que pour déterminer la position des éléments cardinaux on a besoin de connaître de façon très précise la géométrie (positions des centres et des sommets) et la composition (valeurs des indices des différents milieux) du système. En revanche, une fois ces éléments déterminés, toutes les études ultérieures pourront être effectuées sans avoir à connaître la structure physique du système centré et très simplement en utilisant sa représentation à l'aide de ses éléments cardinaux.

### 4.2.2 FOYERS ET PLANS FOCaux

Par définition, si le point objet est à l'infini sur l'axe, son conjugué est le foyer principal image  $F'$ .

Par définition, le point objet  $F$  sur l'axe ayant pour conjugué le point image à l'infini sur l'axe est le foyer principal objet  $F$ .

Pour un système, le foyer principal image et le foyer principal objet sont uniques.

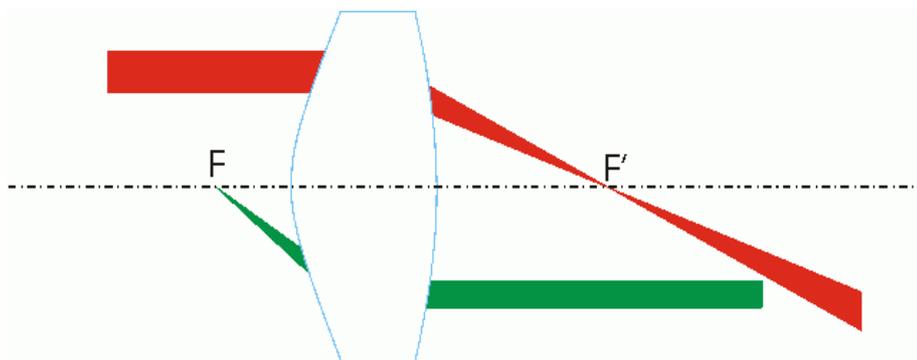


Figure 2:

N.B.: il convient de bien remarquer que les deux foyers ne sont pas les conjugués l'un de l'autre : l'expérience montre que cette erreur est souvent commise par des étudiants inattentifs.

Le plan focal image et le plan focal objet sont les plans de front correspondants, c'est-à-dire les plans perpendiculaires à l'axe du système respectivement en  $F'$  et en  $F$ .

Le plan focal image est le lieu des foyers secondaires où convergent les faisceaux incidents cylindriques. De même le plan focal objet est le lieu des foyers secondaires par où passent les faisceaux émergents cylindriques. La direction de ces faisceaux cylindriques ne sera déterminée que plus loin [4.2.5](#).

Si les foyers sont à l'infini le système est dit " AFOCAL ". On peut remarquer que le dioptré plan réalise un système afocal.

### 4.2.3 PLANS PRINCIPAUX

LES PLANS PRINCIPAUX SONT DEUX PLANS DE FRONT CONJUGUÉS POUR LESQUELS LE GRANDISSEMENT LINÉAIRE EST ÉGAL A 1.

Si, comme sur la figure 3, les foyers  $F$  et  $F'$  sont à distance finie, on considère un incident  $SI$ , parallèle à l'axe, qui émerge suivant  $I'F'$ . On considère également l'incident  $FJ$  tel que l'émergent correspondant ait même support que  $SI$ . Les points de rencontre  $K$  des incidents choisis et  $K'$  des émergents correspondants existent à distance finie et sont conjugués.

Ce résultat est valable pour tous les couples de points voisins de l'axe des plans de front  $P$  et  $P'$  passant par  $K$  et  $K'$  tels que  $KH = K'H'$ .

On remarque que le grandissement pour les plans  $P$  et  $P'$  est égal à 1 : ces deux plans sont donc les plans principaux.

Les points  $H$  et  $H'$  sont les points principaux. Par définition  $HH'$  caractérise l'interstice du système

Propriétés :

→ C'est le lieu des points d'intersection des incidents parallèles à l'axe et des émergents correspondants passant par  $F'$ .

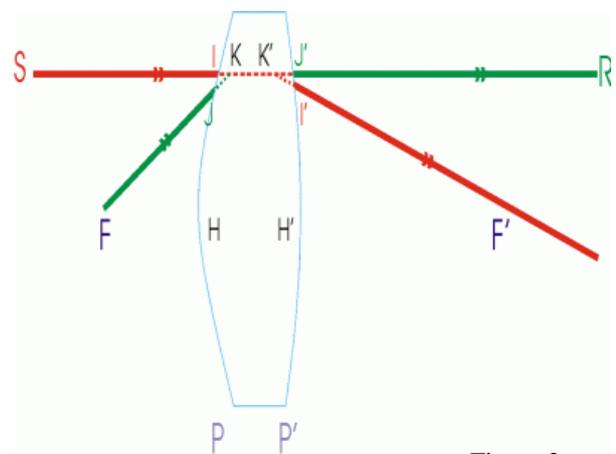


Figure 3:

### 4.2.4 DISTANCES FOCALES

La distance focale objet est par définition la mesure algébrique  $HF$ , parfois notée  $f = HF$ . La distance focale image est par définition la mesure algébrique  $H'F'$ , parfois notée  $f' = H'F'$

Sur la figure 4 le système est représenté par ses foyers et ses plans principaux :  $n$  est l'indice du milieu que voit la face d'entrée et  $n'$  l'indice du milieu que voit la face de sortie.

Tous les rayons issus d'un point du plan focal objet émergent parallèles entre eux et donc à  $K'F'$ . Si on applique la relation de LAGRANGE HELMHOLTZ à l'objet  $HK$  et à son image  $H'K'$ , on a :

$$n \cdot HK \cdot \alpha = n' \cdot H'K' \cdot \alpha'$$

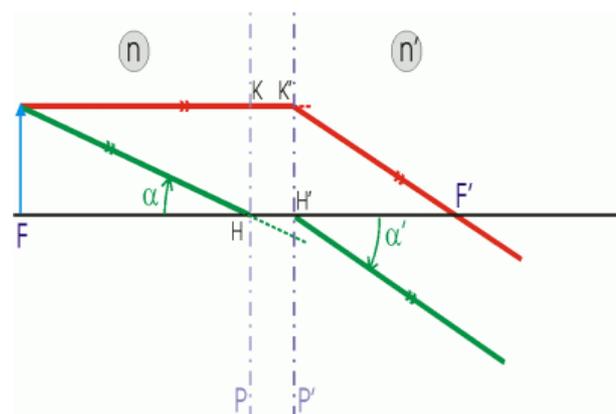


Figure 4:

Par ailleurs, dans les conditions de l'approximation de GAUSS :

$$\begin{aligned}\overline{F\Phi} &= \overline{HF} \tan \alpha \approx \overline{HF} \cdot \alpha \text{ avec } \overline{F\Phi} > 0, \overline{HF} \text{ et } \alpha < 0 \\ &= \overline{H'K'} = \overline{H'F'}(-a') \text{ avec } \overline{H'K'} > 0, \overline{H'F'} > 0 \text{ et } a' < 0\end{aligned}$$

soit finalement :  $\overline{HF} \cdot \alpha = \overline{H'F'} \cdot a'$ .

En divisant ce résultat par l'égalité  $n \cdot \alpha = a'$ , il vient :

$$\frac{\overline{H'F'}}{\overline{HF}} = -\frac{n'}{n} \quad (4.1)$$

Dans un système dioptrique, les distances focales sont toujours de signes contraires et leur rapport est celui des indices des milieux extrêmes changé de signe.

Comme pour les dioptries on définit la vergence V du système :

$$V = \frac{n'}{\overline{H'F'}} = -\frac{n}{\overline{HF}}$$

La vergence se mesure en dioptries. Par définition, la dioptrie est la vergence d'un système optique de distance focale 1 mètre dans un milieu d'indice 1.

#### 4.2.5 APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

##### Construction de l'émergent correspondant à un incident donné

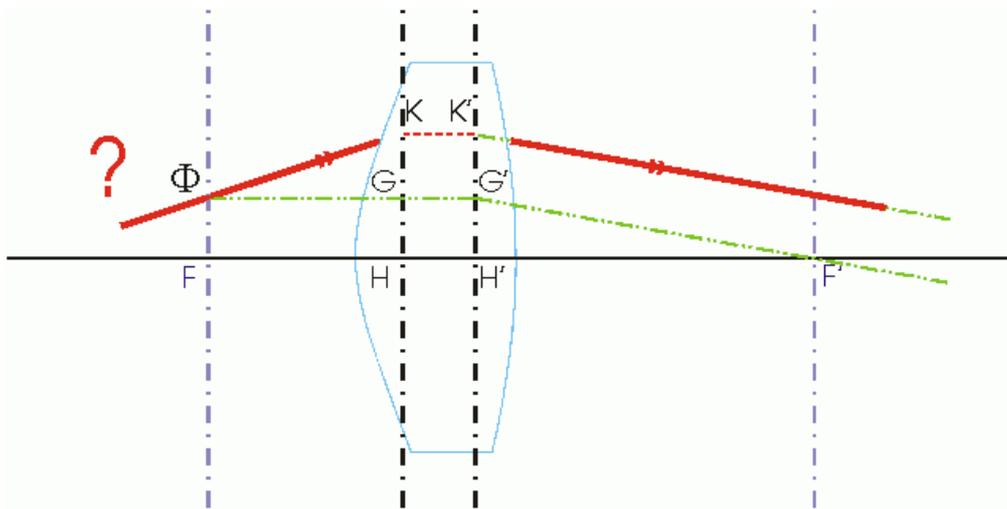


Figure 5:

On considère le rayon incident (figures 5 et 6) qui coupe le plan principal objet en K : l'émergent correspondant passe par le conjugué K' qui appartient au plan principal image: on connaît alors un point du support du rayon émergent et il reste seulement à déterminer sa direction par l'une des deux méthodes décrites ci-après.

1.

- a. Soit on trace  $FJ$  parallèle à l'incident initial. Au rayon  $FJ$  qui est issu du foyer objet  $F$  correspond un émergent, parallèle à l'axe, qui coupe le plan focal image en  $\Phi'$ . Par définition du plan focal image, tous les rayons incidents parallèles à  $FJ$  convergent au foyer secondaire  $\Phi'$  et par suite l'émergent cherché est  $K\Phi'$
- b. Soit on considère le foyer secondaire  $\Phi$  '  $F'$ . Par suite l'émergent cherché est la parallèle à  $G'F'$  passant par  $K$ .

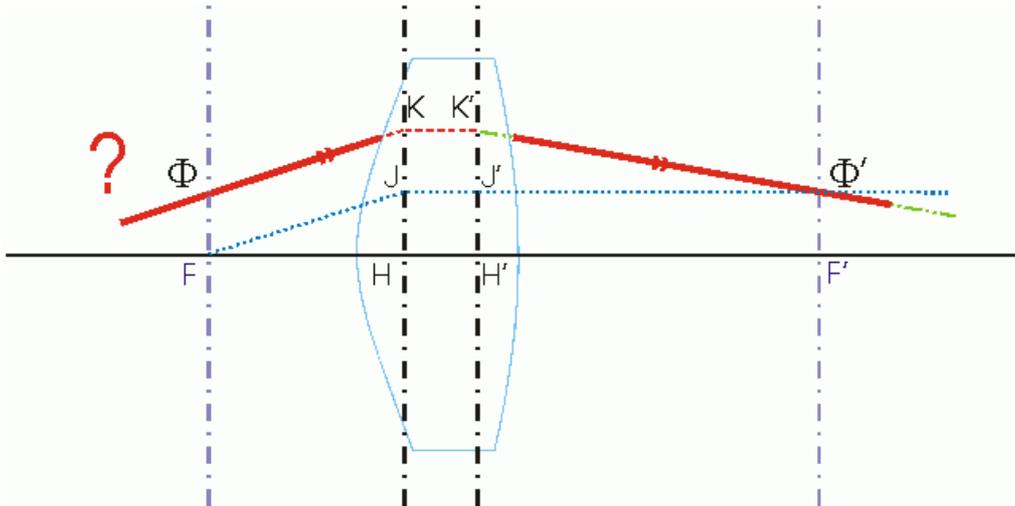


Figure 6:

Construction de l'image d'un objet AB

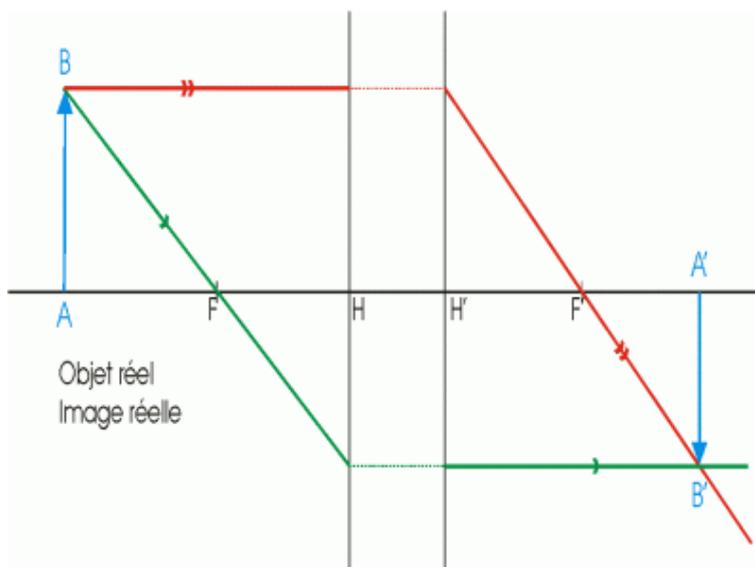


Figure 7:

L'aplanétisme étant réalisé dans les conditions de l'approximation de GAUSS, si A est sur l'axe, il suffit de construire l'image du point B. On l'obtient en construisant les émergents correspondants à deux incidents particuliers issus de B :

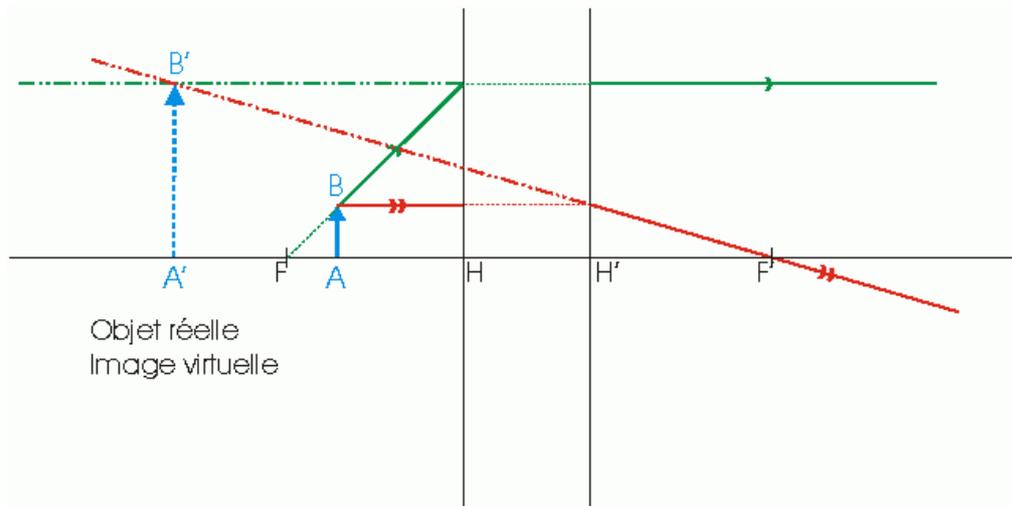


Figure 8:

#### 4.2.6 POINTS NODAUX

LES POINTS NODAUX N ET N' SONT DEUX POINTS CONJUGUÉS SUR L'AXE TELS QU'A TOUT INCIDENT PASSANT PAR N CORRESPOND UN ÉMERGENT PASSANT PAR N' ET PARALLÈLE À L'INCIDENT.

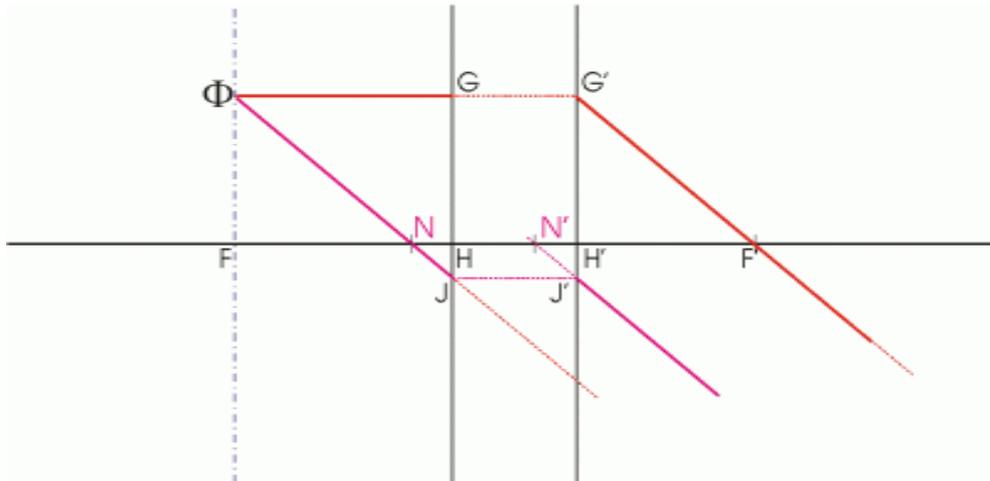


Figure 9:

Pour construire les points nodaux à partir des éléments cardinaux déjà connus on procède comme l'indique la figure 9 :

- si  $\Phi$  est sur l'axe.
- ceci est vrai pour le rayon incident  $\Phi F'$  qui coupe l'axe en N.
- l'émergent correspondant à J émerge en J' et son support coupe l'axe en N'.

Sur la figure 7 on voit que les triangles  $\Phi H F'$  sont égaux donc :

$$\overline{FN} = \overline{H'F'} \tag{4.2}$$

et on peut trouver de même :

$$\overline{F'N'} = \overline{HF} \quad (4.3)$$

La dernière relation est évidente par application du principe de retour inverse de la lumière (les éléments objets et les éléments images échangent leurs rôles). On peut aussi la démontrer de façon plus lourde après avoir remarqué l'égalité des triangles NHJ et N'H'J', on a en effet :

$$\overline{F'N'} = \overline{F'H''} + \overline{H'N'} = \overline{NF} + \overline{HN} = \overline{HF} \quad (4.4)$$

Par ailleurs dans le parallélogramme NN'J'J les côtés opposés NN' et JJ' sont égaux. Comme de plus JJ' = HH' on en déduit que la distance des points nodaux est égale à l'interstice du système :

$$\overline{NN'} = \overline{HH'} \quad (4.5)$$

Enfin on peut remarquer que :

$$\overline{HN} = \overline{H'N'} = \overline{HF} + \overline{FN} = \overline{HF} + \overline{H'F'} = f + f' \quad (4.6)$$

#### 4.2.7 CONCLUSION - CAS DU DIOPTRE SPHÉRIQUE

Un système centré dioptrique est complètement déterminé par la connaissance de ses éléments cardinaux. Compte tenu des relations qui les lient il suffit de connaître les foyers et les points principaux ou les foyers et les points nodaux.

Le système avec foyers à distance finie le plus simple est le dioptrique sphérique. En utilisant les définitions on peut voir que, dans ce cas, les plans principaux sont confondus avec le plan tangent au sommet : H et H' sont en S. Les points nodaux sont confondus avec le centre C.

On retrouve ces résultats à l'aide de la relation 4.6 : en utilisant les relations 3.2 et 3.3 on a en effet :

$$f' \equiv \overline{SF_2} = \frac{n_2 \overline{SC}}{n_2 - n_1} \text{ et } f \equiv \overline{SF_1} = \frac{-n_1 \overline{SC}}{n_2 - n_1} \implies \overline{HN} = f + f' = \overline{SC}$$

### 4.3 FORMULES DES SYSTÈMES CENTRÉS

#### 4.3.1 FORMULES DE CONJUGAISON

##### Origines aux points principaux

On repère la position de l'objet A par rapport au point principal objet H à l'aide de HA et la position de l'image A' par rapport au point principal H' à l'aide de H'A'.

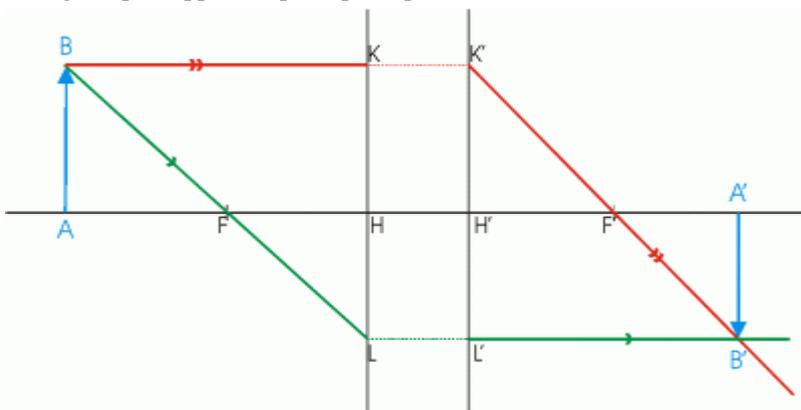


Figure 10:

Sur la figure 10, les triangles LHF et LKB, d'une part, et les triangles KHF' et K'L'B', d'autre part, sont semblables. On a donc :

$$\frac{\overline{LH}}{\overline{LK}} = \frac{\overline{HF}}{\overline{HA}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{H'K'}}{\overline{L'K'}} = \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}}$$

En ajoutant les deux égalités membre à membre il vient :

$$\frac{\overline{LH}}{\overline{LK}} + \frac{\overline{H'K'}}{\overline{L'K'}} = \frac{\overline{LH} + \overline{HK}}{\overline{LK}} = 1 = \frac{\overline{HF}}{\overline{HA}} + \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}}$$

Puisque  $\frac{\overline{H'F'}}{\overline{HF}} = -\frac{n'}{n}$  on peut remplacer HF par  $\frac{-n}{n'} \overline{H'F'}$  de sorte que la relation précédente devient :

$$-\frac{n}{n'} \frac{\overline{H'F'}}{\overline{HA}} + \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} = 1$$

En multipliant par  $\frac{n'}{\overline{H'F'}}$  on fait apparaître la vergence V et la forme la plus utile de la relation de conjugaison :

$$-\frac{n}{\overline{HA}} + \frac{n'}{\overline{H'A'}} = \frac{n'}{\overline{H'F'}} = V \quad (4.7)$$

#### Origines aux foyers : Formules de NEWTON

On repère la position de l'objet par FA et la position de l'image par FA'. On voit sur la figure 8 les triangles FAB et FHL, d'une part, FHK' et F'A'B', d'autre part, sont semblables. On en déduit :

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{HL}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{F'H'}}{\overline{F'A'}} = \frac{\overline{H'K'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

D'où on tire la relation de conjugaison :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{HF} \cdot \overline{H'F'} \quad (4.8)$$

et les expressions du grandissement :

$$\Gamma = -\frac{\overline{HF}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{H'F'}} \quad (4.9)$$

Puisque HF et H'F' sont de signes contraires, il en est de même pour FA et F'A'. Par ailleurs, à chaque valeur du grandissement, correspond une seule position de l'objet.

#### 4.3.2 AUTRES RELATIONS

Comme pour le dioptré sphérique :  $nG = \frac{\alpha'}{\alpha}$  est le rapport de convergence et

$$g = \frac{d\overline{H'A'}}{d\overline{HA}} = \frac{d\overline{F'A'}}{d\overline{FA}} \quad \text{est le grandissement axial.}$$

De la relation de LAGRANGE HELMHOLTZ,  $n \cdot AB \cdot \alpha' = n' \cdot A'B' \cdot \alpha$  on tire :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{n}{n'} \implies \Gamma \cdot G = \frac{n}{n'} \quad (4.10)$$

Soient A et A' deux points conjugués et AC un petit déplacement de l'objet le long de l'axe. Le déplacement correspondant de l'image est A'C'.

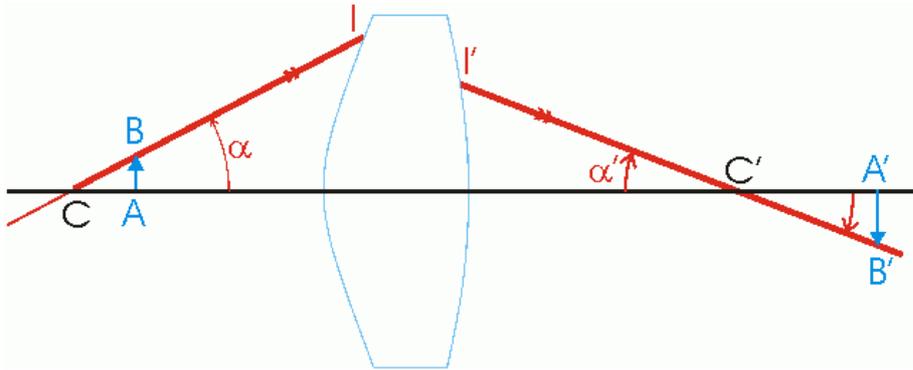


Figure 11:

Si, comme le montre la figure 9, IC' est le rayon émergent correspondant à l'incident CI, et A'B' est l'image de AB. On voit que :

$$\overline{A'B'} = \alpha' \overline{C'A'} \quad \text{et} \quad \overline{AB} = \alpha \overline{CA}$$

d'où

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\alpha' \overline{C'A'}}{\alpha \overline{CA}}$$

Si le déplacement AC est assez petit on peut confondre les valeurs de g,  $\Gamma$ , on voit que  $g = \Gamma^2 \frac{n'}{n}$  est toujours positif. On peut donc conclure :

**POUR LES SYSTÈMES CENTRÉS DIOPTRIQUES L'OBJET ET L'IMAGE SE DEPLACENT TOUJOURS DANS LE MÊME SENS.**

#### 4.3.3 CAS PARTICULIER: MILIEUX EXTRÊMES IDENTIQUES

Ce cas particulier est très important en pratique puisqu'il correspond à tous les systèmes optiques usuels [lentilles, loupes, microscopes (sauf cas du microscope à immersion) lunettes astronomiques, terrestres ... ] dont les faces d'entrée et de sortie baignent dans l'air. Si  $n = n'$  on a  $HF = f = H'F' = f'$ . On pose alors  $\Phi = 1/f$  et on obtient les résultats suivants où les formules les plus utilisées sont en numérotées.

- Formules de conjugaison :

$$-\frac{1}{HA} + \frac{1}{H'A'} = \frac{1}{\Phi}$$

et

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -\Phi^2$$

- Grandissement: les relations de NEWTON donnent :

$$\Gamma = -\frac{\overline{HF}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{H'F'}} = \frac{\overline{H'F'}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{H'A'} - \overline{F'A'}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{HF}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{HA} - \overline{FA}}$$

d'où, on tire - en sommant les numérateurs et les dénominateurs de la quatrième et de la dernière expression ci-dessus - une nouvelle forme très utile du grandissement :

$$\Gamma = \frac{\overline{H'A'}}{\overline{HA}}$$

- Eléments cardinaux :  $\overline{HN} = \overline{H'N'} = \overline{HF} + \overline{H'F'} = (-\Phi)$

On cherche à déterminer les éléments cardinaux d'un nouveau système constitué par l'association de deux systèmes dont les éléments cardinaux sont connus. Avec les notations habituelles (H et H', F et F', N et N') on caractérise les éléments du premier système par l'indice  $n_1$  et ceux du second système par l'indice  $n_2$ . Les lettres sans indice désignent des éléments du système complet.

$n$  et  $n'$  sont les indices des milieux d'entrée et de sortie du système complet ; N est l'indice du milieu qui sépare les deux systèmes. La face d'entrée du système (1) baigne donc dans le milieu d'indice  $n$  tandis que sa face de sortie voit le milieu d'indice N. Pour le système (2) c'est le milieu d'indice N qui est en contact avec la face d'entrée tandis que la face de sortie baigne dans le milieu d'indice  $n'$ .

La position du second système par rapport au premier est définie si on se donne  $e = \overline{H_1 H_2}$  qui donne la "distance" entre le plan principal image du premier système et le plan principal objet du second.

#### 4.4.1 CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES FOYERS ET DES PLANS PRINCIPAUX

Commenter la construction de l'image

#### 4.4.2 POSITION DES FOYERS

Le foyer image F' de l'ensemble (1) + (2) est l'image du foyer image F<sub>1</sub>' du système (1) à travers le système (2). Par application de la formule de conjugaison de NEWTON on trouve :

$$\overline{F_2 F_1'} \cdot \overline{F_2' F'} = f_2 f_2' \quad (4.12)$$

Le foyer objet F de l'ensemble a pour image, à travers le système (1), le foyer objet F<sub>2</sub> du système (2). On trouve alors :

$$\overline{F_1 F} \cdot \overline{F_1' F_2} = f_1 f_1' \quad (4.13)$$

Les positions des foyers se déduisent des relations précédentes.

N.B. On trouve parfois désignée par le nom de "intervalle optique" la quantité  $\overline{F_1' F_2}$  qui caractérise aussi la position du système (2) par rapport au système (1). On a en effet :

$$\overline{F_1' F_2} = \overline{F_1' H_1'} + \overline{H_1' H_2} + \overline{H_2 F_2} = -f_1' + e + f_2 \quad (4.14)$$

### 4.4.3 CALCUL DES DISTANCES FOCALES

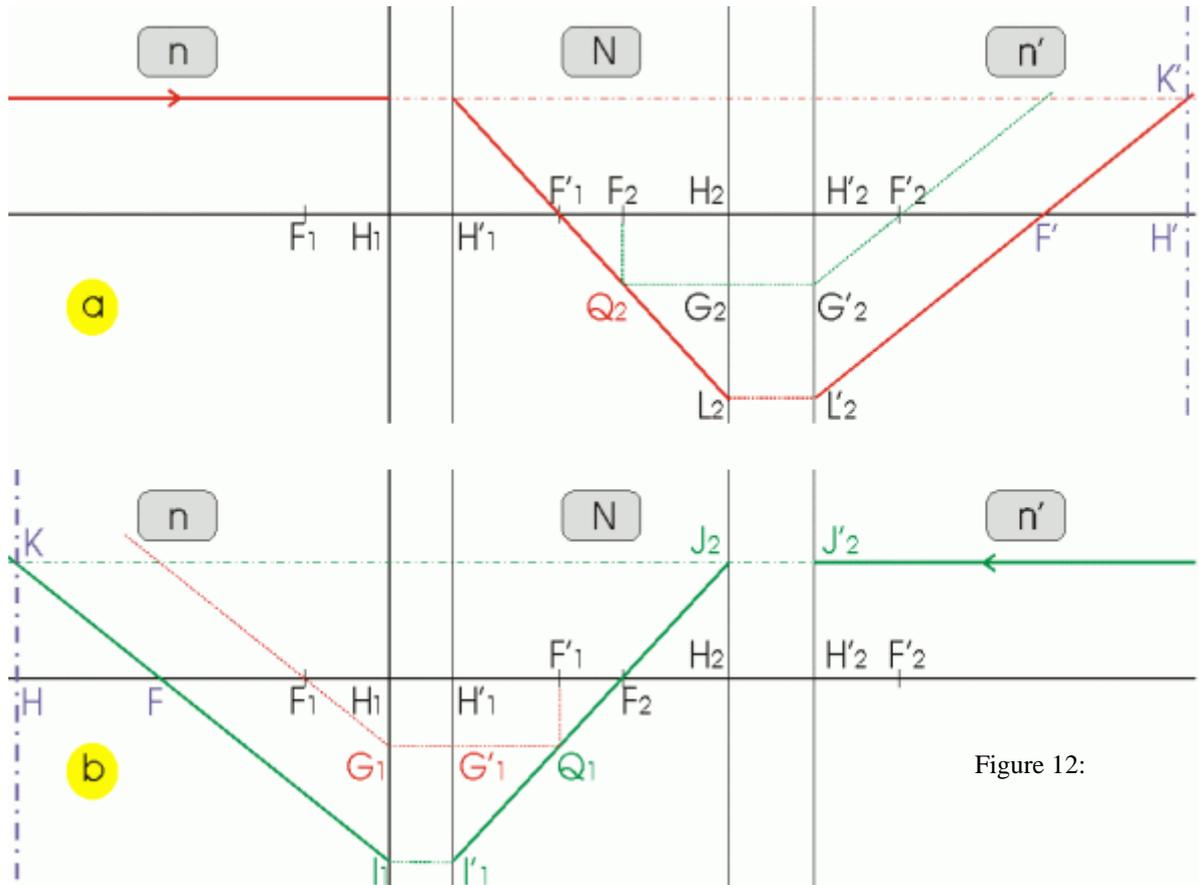


Figure 12:

Pour calculer la distance focale image  $f'$  on considère, à l'aide de la figure 12a, les égalités résultant de la similitude des triangles :

$$\frac{H'K'F'}{H_2G_2F_2} \quad \text{et} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{H'K'}}{\overline{H_2G_2}} = \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H_2F_2}} = \frac{f'}{f_2} \quad \text{d'une part}$$

$$\frac{H_1K_1F'_1}{F_2Q_2F'_1} \quad \text{et} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{H_1K_1}}{\overline{F_2Q_2}} = \frac{\overline{H_1F'_1}}{\overline{F_2F'_1}} = \frac{f'_1}{-F'_1F_2} \quad \text{d'autre part}$$

Puisque  $\overline{H'K'} = \overline{H_1K_1}$  et  $\overline{H_2G_2} = \overline{F_2Q_2}$  les deux derniers rapports sont égaux et on en déduit :

$$\overline{H'F'} = f' = -\frac{f'_1 f'_2}{F'_1 F_2} \quad (4.15)$$

Un raisonnement analogue à partir de la figure 10b, ou, plus simplement, l'utilisation du principe de retour inverse de la lumière donnent :

$$\overline{HF} = f = \frac{f_1 f_2}{F'_1 F_2} \quad (4.16)$$

On peut remarquer que, N étant l'indice du milieu intermédiaire on a  $\frac{f'_1}{f_1} = -\frac{N}{n}$  et  $\frac{f_2}{f'_2} = -\frac{n}{N}$ . En tirant le rapport  $\frac{f'}{f}$  des expressions 4.15 et 4.16 on retrouve bien le résultat général 4.1 établi précédemment..

#### 4.4.4 FORMULE DE GULLSTRAND

Le nouveau système a pour vergence :

$$V = \frac{n'}{f'} = -\frac{n' \overline{F'_1 F_2}}{f'_1 f'_2}$$

On écrit l'intervalle optique sous la forme :

$$\overline{F'_1 F_2} = \overline{F'_1 H'_1} + \overline{H'_1 H_2} + \overline{H_2 F_2} = -f'_1 + e + f_2$$

La vergence s'écrit alors :

$$V = \frac{n' (-f'_1 + e + f_2)}{f'_1 f'_2}$$

Dans cette expression on fait alors apparaître les vergences  $V_1$  et  $V_2$  des deux systèmes :

$$V_1 = \frac{N}{f'_1} = -\frac{n}{f_1} \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{n'}{f'_2} = -\frac{N}{f_2}$$

il vient :

$$V = \frac{n'}{f'_2 f'_1} (-f'_1 + e + f_2) = V_2 \frac{V_1}{N} \left( \frac{N}{V_1} - e + \frac{N}{V_2} \right)$$

soit finalement, la formule de Gullstrand qui donne la vergence du système complet en fonction des vergences des deux systèmes qui le composent, de l'indice du milieu qui les sépare et de la distance  $e = H_1 H_2$  :

$$V = V_1 + V_2 - e \frac{V_1 V_2}{N} \quad (4.17)$$

# Chapitre 5

## LENTILLES

### 5.1 LENTILLES ÉPAISSES

#### 5.1.1 DÉFINITIONS

Une lentille est un système centré formé par un milieu transparent homogène et isotrope limité par deux surfaces sphériques de rayons respectifs. Les deux faces baignent dans un même milieu.  $n$  désigne l'indice de la lentille relatif au milieu ambiant (si celui-ci est l'air  $n$  est pratiquement l'indice absolu).

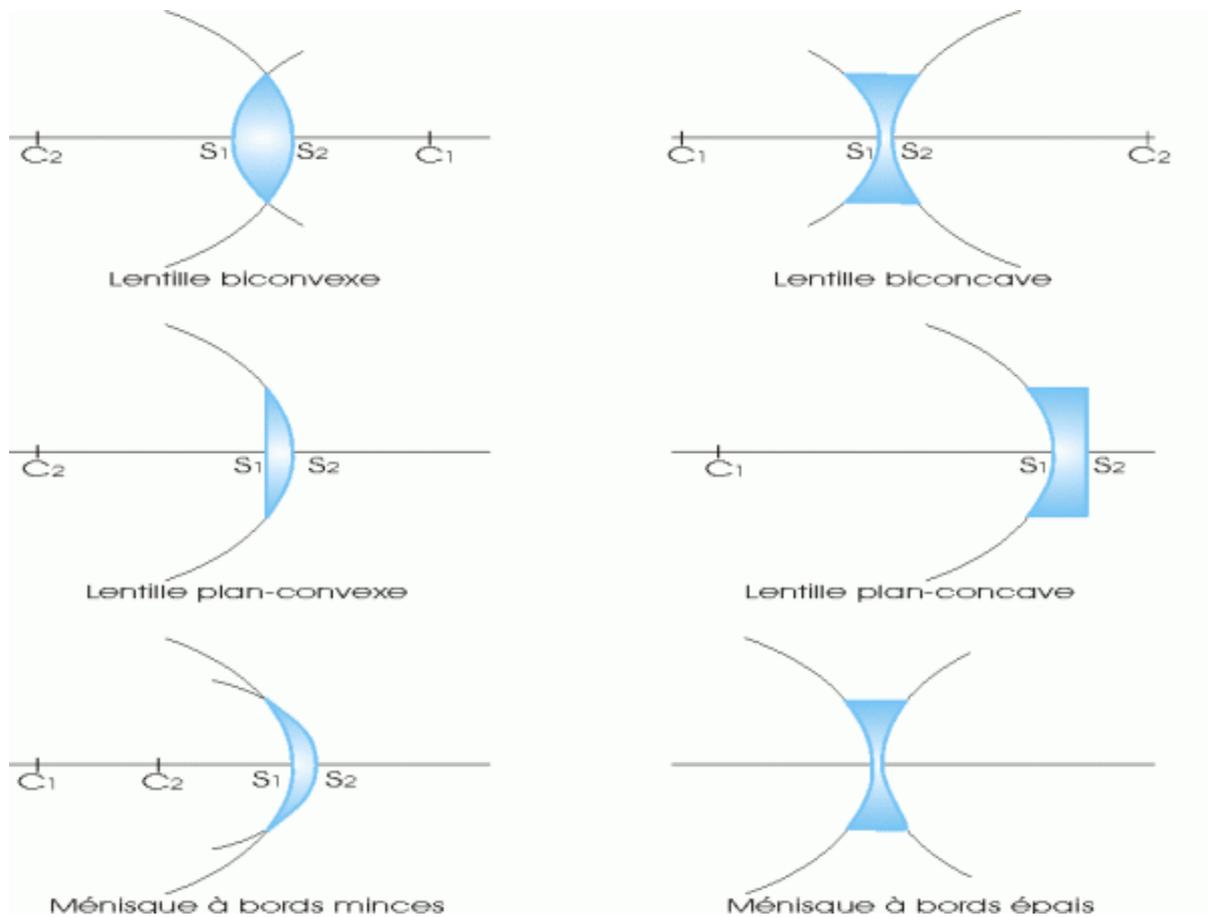


Figure 1: On distingue 6 types différents de lentilles

#### 5.1.2 CALCUL DE LA DISTANCE FOCALE D'UNE LENTILLE

##### Remarque :

Comme tout système centré une lentille a évidemment une distance focale objet  $f$  et une distance focale image  $f'$ . Mais puisqu'il s'agit d'un système centré avec milieux extrêmes identiques d'indice égal à 1, il est convenu que "LA" distance focale d'une lentille est sa distance focale image que l'on notera  $\Phi$

Pour effectuer les calculs il suffit de considérer que la lentille est formée par l'association de deux systèmes centrés :

- le dioptré d'entrée de rayon  $S_1C_1 = R_1$ . Pour celui-ci, avec les conventions habituelles  $n_1 = 1$  et  $n_2 = n$  et les points principaux  $H_1$  et  $H_1'$  sont confondus avec  $S_1$ .

- le dioptré de sortie de rayon  $S_2C_2 = R_2$ . Pour celui-ci, avec les conventions habituelles  $n_1 = n$  et  $n_2 = 1$  et les points principaux  $H_2$  et  $H_2'$  sont confondus avec  $S_2$ .

La vergence d'un dioptré est donnée par :

$$V = \frac{n_2 - n_1}{SC}$$

La vergence du dioptré d'entrée est donc :

$$V_1 = \frac{n - 1}{S_1C_1}$$

et celle du dioptré de sortie :

$$V_2 = \frac{1 - n}{S_2C_2}$$

On applique alors la formule de GULLSTRAND en remarquant que:

l'indice  $N$  du milieu intermédiaire est dans ce cas égal à  $n$   
et  $e = H_1H_2 = S_1S_2$ .

La relation

$$V = V_1 + V_2 - e \frac{V_1 V_2}{N}$$

donne :

$$V = \frac{1}{\Phi} = \frac{n - 1}{S_1C_1} + \frac{1 - n}{S_2C_2} + \frac{(n - 1)^2 e}{n \cdot S_1C_1 \cdot S_2C_2} \quad (5.1)$$

### 5.1.3 POSITION DES FOYERS

Le foyer image  $F'$  de la lentille est l'image du foyer image  $F_1'$  du dioptré d'entrée à travers le dioptré de sortie. Par application des formules de conjugaison de NEWTON il vient :

$$\overline{F_2F_1'} \cdot \overline{F_2'F'} = f_2 f_2' \quad (5.2)$$

De même, le foyer objet  $F$  de la lentille a pour image le foyer objet  $F_2$  du dioptré de sortie à travers le dioptré d'entrée :

$$\overline{F_1F} \cdot \overline{F_1'F_2} = f_1 f_1' \quad (5.3)$$

En introduisant " l'intervalle optique "  $F_1'F_2 = F_1'S_1 + S_1S_2 + S_2F_2$  qui s'écrit aussi :

$$\overline{F_1'F_2} = -f_1' + e + f_2 \quad (5.4a)$$

on voit que la position du foyer objet F de la lentille par rapport au foyer objet  $F_1$  du dioptre d'entrée comme la position du foyer image  $F'$  de la lentille par rapport au foyer image  $F_2$  du dioptre de sortie sont données par des relations déjà rencontrées dans le cas le plus général.

#### 5.1.4 CENTRE OPTIQUE

Le centre optique O d'une lentille est défini comme le point de l'axe " appartenant " au milieu d'indice n tel qu'à tout rayon intérieur dont le support passe par O correspondent un incident et un émergent parallèles entre eux.

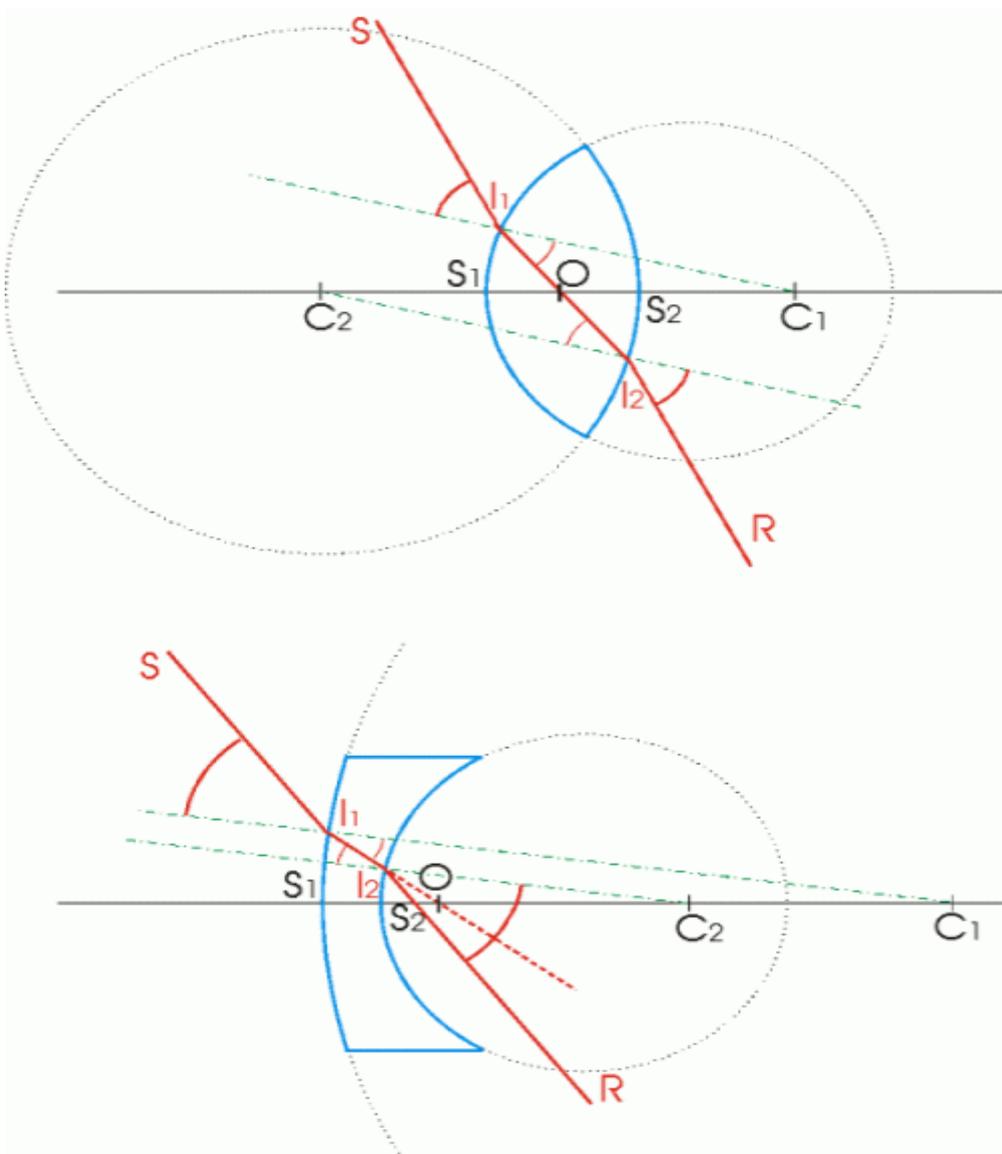


Figure 2:

### Remarque :

le point O " appartient " toujours au milieu d'indice n mais ceci n'implique pas qu'il soit obligatoirement situé entre S<sub>1</sub> et S<sub>2</sub>.

Pour déterminer O, on considère (figure 2) une normale arbitraire C<sub>1</sub>I<sub>1</sub> au dioptre d'entrée et la normale C<sub>2</sub>I<sub>2</sub>, au dioptre de sortie, qui lui est parallèle.

Suivant la 3<sup>ème</sup> loi de Descartes l'incident SI<sub>1</sub> et l'émergent I<sub>2</sub>R qui correspondent au rayon intérieur I<sub>1</sub>I<sub>2</sub> sont parallèles entre eux. Le support de I<sub>1</sub>I<sub>2</sub> coupe l'axe qui joint les centres C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub> des deux faces de la lentille, c'est-à-dire l'axe principal, au point O conformément à la définition du centre optique.

Les triangles OC<sub>1</sub>I<sub>1</sub> et OC<sub>2</sub>I<sub>2</sub> sont semblables puisque tous leurs angles sont égaux. On en déduit :

$$\frac{\overline{OC_1}}{\overline{OC_2}} = \frac{\overline{OI_1}}{\overline{OI_2}} = \frac{\overline{I_1C_1}}{\overline{I_2C_2}} = \frac{\overline{S_1C_1}}{\overline{S_2C_2}} = \frac{\overline{OC_1} - \overline{S_1C_1}}{\overline{OC_2} - \overline{S_2C_2}} = \frac{\overline{OS_1}}{\overline{OS_2}} = \frac{R_1}{R_2}$$

d'où :

$$\frac{\overline{OS_1}}{\overline{OS_2} - \overline{OS_1}} = \frac{R_1}{R_2 - R_1} \Rightarrow \overline{OS_1} = e \frac{R_1}{R_2 - R_1} \quad (5.5)$$

ou, de même :

$$\frac{\overline{OS_2} - \overline{OS_1}}{\overline{OS_2}} = \frac{R_2 - R_1}{R_2} \Rightarrow \overline{OS_2} = e \frac{R_2}{R_2 - R_1} \quad (5.6)$$

Il faut remarquer que, dans les conditions de l'approximation de GAUSS, l'incident et l'émergent correspondants à un rayon intérieur passant par le centre optique O coupent l'axe aux points nodaux N et N' de la lentille qui sont confondus avec les points principaux H et H'.

Autrement dit : le centre optique O est l'image du point nodal objet N de la lentille à travers le dioptre d'entrée, ou l'image du centre optique O à travers le dioptre de sortie est le point nodal image N'.

## **5.2 LENTILLES MINCES**

En optique une lentille est considérée comme mince si on peut, avec une très bonne approximation, confondre les sommets S<sub>1</sub> et S<sub>2</sub> et le centre optique O.

Il faut évidemment que l'épaisseur e soit négligeable devant les rayons de courbure des faces : si e << R<sub>1</sub> et e << R<sub>2</sub> la vergence de la lentille ne dépend pas de e et, d'après la relation 5.1, est simplement exprimée par :

$$V = \frac{1}{\Phi} = ((n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)) \quad (5.7)$$

Mais cette condition, nécessaire pour pouvoir considérer que S<sub>1</sub> est confondu avec S<sub>2</sub>, n'est pas suffisante pour que ce point coïncide en première approximation avec le centre optique O. Il faut de plus que OS<sub>1</sub> et OS<sub>2</sub> soient négligeables ce qui implique e << R<sub>2</sub> - R<sub>1</sub>.

$S_1$ ,  $S_2$  et  $O$  étant confondus, les points nodaux et les points principaux sont aussi confondus. Une lentille mince est alors complètement définie par la connaissance de la distance focale  $\Phi$  donne les représentations conventionnelles des lentilles minces convergentes ( $\Phi$ )

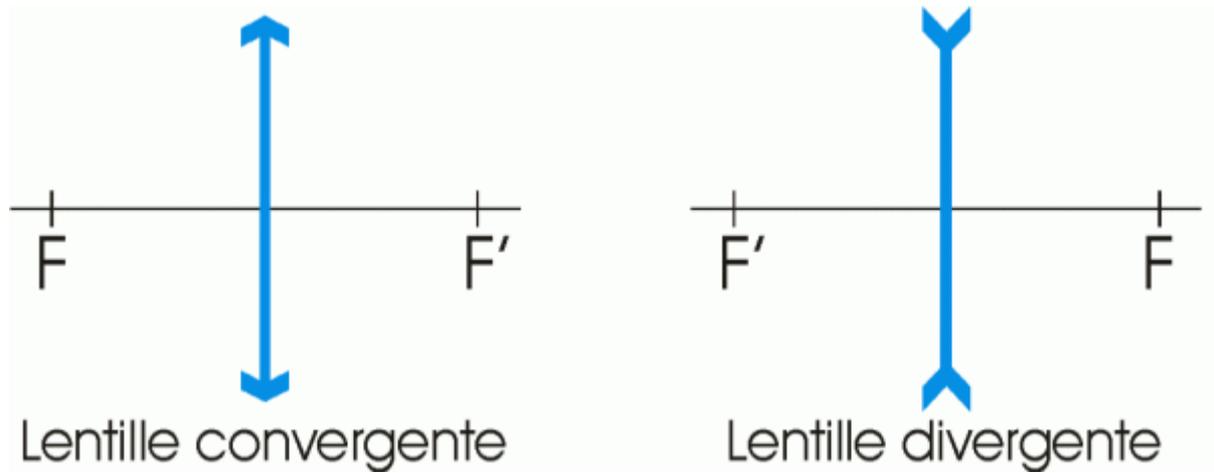


Figure 3:

Les points principaux étant confondus avec le centre optique, on retrouve très vite les formules des lentilles minces avec origine au centre optique telles qu'elles ont été admises dans le secondaire :

$$\frac{-1}{OA} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{OF'} \quad \text{et} \quad \Gamma = \frac{OA'}{OA} \quad (5.8)$$

### 5.3 EXEMPLE DE CALCUL

Pour illustrer les considérations générales sur les lentilles, on se propose d'étudier, à titre d'exemple, une lentille biconcave en verre d'indice  $n = \frac{5}{3}$ . Les faces ont des rayons de courbure égaux à 12cm et leurs sommets sont séparés de 1,2cm.

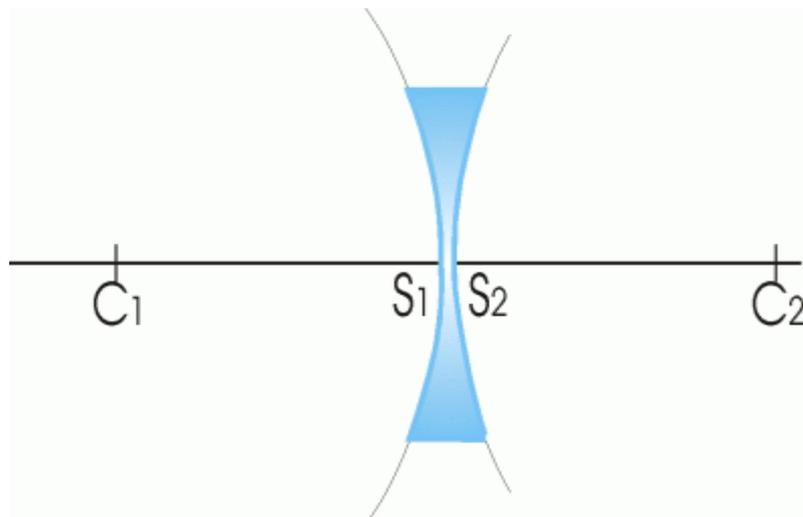


Figure 4:

Pour commencer, après avoir fait un croquis à une échelle pratique, il faut donner les valeurs algébriques correctes aux variables intervenant dans les formules.

En s'aidant de la figure 4 on voit que :

$$S_1 C_1 = R_1 = -12\text{cm} = -120\text{mm}, S_2 C_2 = R_2 = +12\text{cm} = +120\text{mm}, e = S_1 S_2 = +12\text{mm}.$$

On calcule alors la distance focale image en utilisant la relation 5.1 :

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{\frac{5}{3} - 1}{-120} + \frac{1 - \frac{5}{3}}{120} + \frac{\left(\frac{5}{3} - 1\right)^2 12}{\frac{5}{3} (-120)(120)} = \frac{-\frac{4}{3}}{120} + \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{3} (-1200)}$$

soit

$$\frac{1}{\Phi} = -\frac{1}{90} - \frac{1}{4500} \Rightarrow \Phi = -88,235\text{mm} \text{ ou } \Phi \approx -90\text{mm}$$

Le second résultat qui correspond à la relation 5.7 est une bonne approximation du premier si on ne cherche pas une précision supérieure à 2%.

On calcule ensuite la position du centre optique. A l'aide de la relation 5.6, on obtient :

$$\overline{OS_2} = 12 \frac{120}{120 - (-120)} = 6\text{mm}$$

Conformément à la symétrie du système on trouve bien O au centre de la lentille.

Si on ne cherche pas une très grande précision la lentille qui est divergente peut être considérée comme mince avec une distance focale de -90mm.

Si on veut davantage de précision, il est nécessaire de déterminer la position des éléments cardinaux. Comme on connaît déjà la distance focale  $\Phi$ . Du fait de la symétrie du système on pourra se contenter de calculer  $F_2 F_1'$  : on aura  $F_1 F_2 = -F_2 F_1'$ .

Auparavant il faut calculer les distances focales des dioptries d'entrée et de sortie après avoir pris soin d'identifier aux données du problème les variables intervenant dans les relations 3.2 et 3.3 .

Pour le dioptre d'entrée :  $n_1 = 1, n_2 = n = \frac{5}{3}, R = R_1 = -120\text{mm}$ .

D'où (3.2) la distance focale image :

$$\frac{n_2 R}{n_2 - n_1} \Rightarrow f_1' = \frac{\frac{5}{3} (-120)}{\frac{5}{3} - 1} = -300\text{mm}$$

et (3.3) la distance focale objet :

$$\frac{-n_1 R}{n_2 - n_1} \Rightarrow f_1 = \frac{-1 (-120)}{\frac{5}{3} - 1} = +180\text{mm}$$

Pour le dioptre de sortie :  $n_1 = n = \frac{5}{3}, n_2 = 1, R = R_2 = +120\text{mm}$

D'où (3.2) la distance focale image :

$$\frac{n_2 R}{n_2 - n_1} \implies f'_2 = \frac{1(+120)}{1 - \frac{5}{3}} = -180 \text{ mm}$$

et (3.3) la distance focale objet :

$$\frac{-n_1 R}{n_2 - n_1} \implies f_2 = \frac{-\frac{5}{3}(+120)}{1 - \frac{5}{3}} = +300 \text{ mm}$$

On peut remarquer que ces derniers résultats sont évidents du fait de la symétrie entrée-sortie.

L'intervalle optique  $F_1'F_2 = F_1'S_1 + S_1S_2 + S_2F_2$  est donné par :

$$\overline{F_1'F_2} = -f'_1 + e + f_2 = -(-300) + 12 + 300 = +612 \text{ mm}$$

On en déduit d'après 5.3 que :

$$\overline{F_1F'} = \frac{f_1 f'_1}{F_1'F_2} = \frac{180(-300)}{612} = -88.235 \text{ mm}$$

et d'après 5.2 :

$$\overline{F_2F'} = \frac{-f_2 f'_2}{F_1'F_2} = \frac{-(300)(-180)}{612} = +88.235 \text{ mm}$$

Ceci permet de calculer, par exemple la position du point principal image  $H'$  par rapport au sommet  $S_2$  de la face de sortie :

$$\begin{aligned} \overline{S_2H'} &= \overline{S_2F_2'} + \overline{F_2F'} + \overline{F'H'} = f'_2 + \overline{F_2F'} - \Phi \\ &= -180 + 88.235 + 88.235 = -3.53 \text{ mm} \end{aligned}$$

On trouverait de même  $S_1H = +3,53 \text{ mm}$ . Les plans principaux sont à l'intérieur de la lentille entre le centre optique et les faces.

Remarque :

on pourra contrôler les résultats en calculant la position de l'image du centre optique  $O$  à travers le dioptré de sortie. On sait qu'il s'agit du point nodal image  $N'$  qui doit être confondu avec le point principal image  $H'$  puisque les deux faces de la lentille baignent dans le même milieu.

# Chapitre 6

## L'OEIL et les instruments d'optique

L'oeil est l'organe de la vision ; il peut examiner directement des objets ou examiner des images de ces objets fournies par des instruments d'optique (loupes, microscopes, lunettes). Son rôle est fondamental dans l'étude de l'optique.

### 6.1 DESCRIPTIONS ET PROPRIÉTÉS DE L'OEIL

#### 6.1.1 DESCRIPTION COMPLÈTE : L'OEIL PHYSIOLOGIQUE

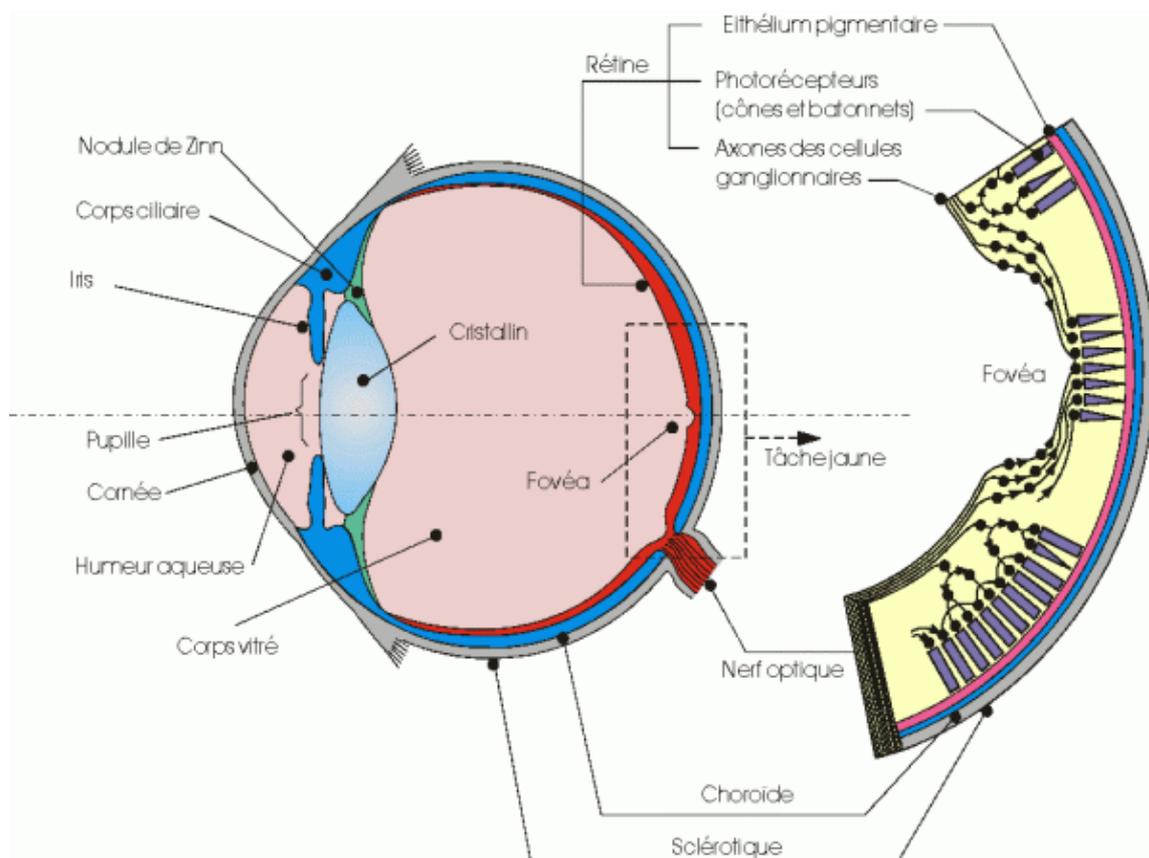


Figure 1:

Le rayon de l'oeil est d'environ 12mm. Le rayon de la cornée est d'environ 8mm. Le cristallin a une épaisseur d'environ 4mm; les rayons de courbure de ses faces sont respectivement égaux à 10 et 6mm. Ce n'est pas un milieu homogène : l'indice varie de 1,36 au bord à 1,42 sur l'axe.

L'écran sur lequel se forme l'image observée est la rétine qui tapisse le fond de l'oeil. La rétine est l'épanouissement du nerf optique : les cellules sensibles sont des cônes et des bâtonnets. La fovéa au centre de la

tâche jaune a un diamètre d'environ 0,3mm et ne contient que des cônes. La tâche jaune, riche en cônes, correspond à la zone sensible en éclairage diurne (éclairage naturel dans la journée).

Un point est vu nettement si son image se forme sur la fovéa. Pour permettre la vision de points différents, sans imposer à chaque fois des mouvements de la tête, l'oeil effectue des rotations rapides dans son orbite autour d'un point O qui est approximativement le centre du globe oculaire.

### 6.1.2 DESCRIPTION SIMPLIFIÉE

Les rayons contribuant à la formation de l'image sur la fovéa ou la tache jaune sont paraxiaux et l'oeil est un système centré qui fonctionne donc dans les conditions de l'approximation de GAUSS.

Les milieux extrêmes, l'air et l'humeur vitrée, étant différents les points nodaux et les points principaux sont distincts et le rapport des distances focales  $\frac{f'}{f}$  est égal à -1,336.

La cornée avec un rayon de courbure de 8mm se comporte comme une paroi transparente et la convergence du dioptre sphérique d'entrée est d'environ  $\frac{0,336}{0,008}$  soit 42 dioptries.

Le cristallin a la convergence d'une lentille épaisse d'indice relatif  $\frac{1,42/1,336}{1,336} = 1,063$ . Avec les rayons de courbure indiqués, ceci conduit à une convergence d'environ 16,8 dioptries. La convergence de l'ensemble étant alors très voisine de 60 dioptries.

Pour un oeil " moyen " normal la distance focale image  $f'$  est voisine de +23mm tandis que la distance focale objet  $f$  est voisine de -17mm. Quand un oeil normal observe un objet éloigné (on dit " à l'infini " par commodité pour les calculs correspondants) le foyer image  $F'$  est sur la rétine et le foyer objet  $F$  environ 15mm en avant de la cornée.

Un calcul complet montre que l'interstice  $HH'$  est voisin de 0,3mm et donc très faible : pratiquement on peut confondre les points principaux  $H$  et  $H'$  d'une part et aussi les points nodaux  $N$  et  $N'$  d'autre part.

Avec une bonne approximation, en optique, l'oeil est équivalent à un dioptre sphérique de sommet  $S$  et de centre  $C$  tel que  $SC = 6\text{mm}$  séparant l'air et le milieu d'indice 1,336. C'est l'OEIL RÉDUIT représenté sur la figure 2.

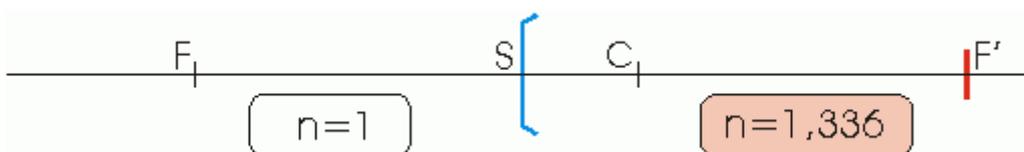


Figure 2:  $SC = 6\text{mm}$   $SF' = \frac{1,336}{0,3366} \approx SF = \frac{-1}{0,3366} \approx$

### 6.1.3 CHAMPS DE L'OEIL

Le champ de vision nette est défini par le cône de sommet  $C$  dont la génératrice s'appuie sur la fovéa. Son ouverture  $\omega_N$  est d'environ  $1^\circ$ . En effet :

$$\omega_N = \frac{0,3}{17} \approx 1,76 \cdot 10^{-2} \text{ radians or } 1^\circ \approx 1,745 \cdot 10^{-2} \text{ radians}$$

Par déplacement du globe oculaire de  $30$  à  $40^\circ$  autour de l'axe optique on obtient le champ de vision directe.

Des images peuvent se former hors de la fovéa mais manquent de netteté. Les points correspondants appartiennent au champ de vision indirecte qui atteint  $140^\circ$  à l'horizontale (il peut être supérieur à  $180^\circ$  chez certains animaux comme les rapaces).

#### 6.1.4 ACCOMMODATION ET DÉFAUTS DE L'OEIL

##### Oeil normal (figure 3)



Figure 3:

Le foyer image  $F'$  est, naturellement et sans effort, sur la rétine. L'oeil voit alors nettement des objets situés "à l'infini". Le point le plus éloigné, sur l'axe, pour lequel il est possible d'obtenir une image rétinienne nette est le PUNCTUM REMOTUM R. Pour un oeil normal R est à l'infini.

Par accommodation, c'est-à-dire du fait de la déformation du cristallin sous l'action des nodules de Zinn, l'oeil peut voir des objets situés à distance finie. La déformation du cristallin étant limitée, quel que soit l'effort musculaire fourni, l'oeil ne peut pas voir les objets situés en deçà d'une distance minimale de vision distincte. Le point correspondant sur l'axe est le PUNCTUM PROXIMUM P. Pour un oeil normal non fatigué P est situé 20 à 30cm en avant de la cornée.

##### Oeil myope (figure 4)



Figure 4:

L'oeil est trop convergent. Le foyer image est naturellement en avant de la rétine. Le PUNCTUM REMOTUM R est à distance finie alors que le PUNCTUM PROXIMUM P est plus proche de la cornée que dans le cas d'un un oeil normal.

La correction de la myopie est possible en plaçant une lentille divergente devant l'oeil.

##### Oeil hypermétrope (figure 5)



Figure 5:

L'oeil n'est pas assez convergent. Le foyer image est naturellement en arrière de la rétine. Le PUNCTUM REMOTUM R est virtuel tandis que le PUNCTUM PROXIMUM P est plus éloignée de la cornée que dans le cas d'un un oeil normal.

L'oeil hypermétrope accommode en permanence ce qui est une cause de fatigue. La correction de l'hypermétropie est possible en plaçant une lentille convergente devant l'oeil.

Autres défauts

L'oeil presbyte est un oeil devenu moins convergent par suite du vieillissement (le relâchement des muscles entraîne au repos une augmentation des rayons de courbure du cristallin). On peut noter que si la presbytie est susceptible de réduire la myopie, elle ne peut qu'aggraver l'hypermétropie.

Un autre défaut courant de l'oeil est l'astigmatie : la symétrie de révolution autour de l'axe optique n'est pas satisfaite et les images des objets sont déformés (un cercle est vu comme une ellipse). Les problèmes correspondants sortent du cadre d'un cours sur les systèmes centrés. Signalons, cependant, que ce défaut peut être corrigé à l'aide de verres toriques convenablement orientés.

6.1.5 GRANDEUR DE L'IMAGE RÉTINIENNE. LIMITE DE RÉOLUTION

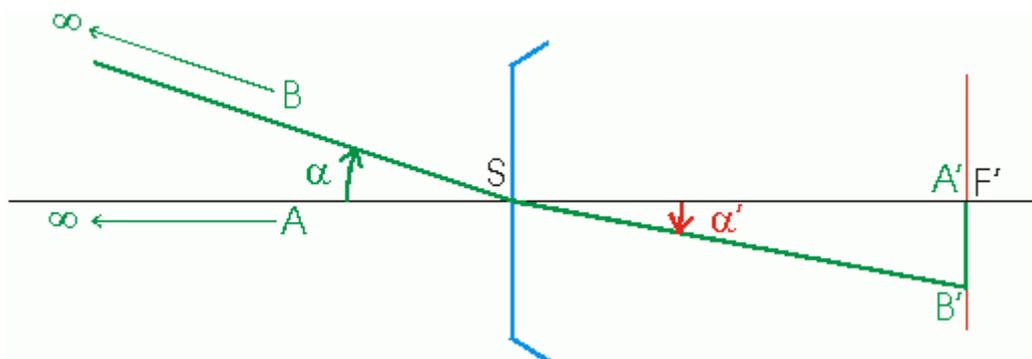


Figure 6:

L'accommodation modifie la position du centre optique C de l'oeil, mais le sommet S reste sensiblement fixe. Si α est le "diamètre apparent" de l'objet AB vu de S (figure 4), dans les conditions de l'approximation de GAUSS, par application de la loi de KEPLER, on a :

$$\alpha' = \widehat{F'SB'} = \frac{\alpha}{n}$$

et

$$F'B' = SF' \tan \alpha' \approx SF' \alpha' = SF' \frac{\alpha}{n} = \alpha \frac{SF'}{n} = \alpha \cdot Cte$$

Une dimension linéaire de l'image rétinienne est proportionnelle au diamètre apparent \* de la dimension correspondante de l'objet.

### Limite de perception.

Sa définition est une réponse à la question : " peut-on toujours voir un objet ? ".

La limite de perception est le diamètre apparent minimal que doit avoir un objet sombre pour être vu sur un fond lumineux. Elle dépend de la forme de l'objet et des conditions d'éclairage. Quand ces dernières sont normales, l'expérience donne 2" d'arc pour une ligne fine et un peu plus pour un disque.

### Limite de résolution ou acuité visuelle.

Sa définition est une réponse à la question : " peut-on toujours distinguer deux objets séparés ? ".

La limite de résolution de l'oeil est la plus petite distance angulaire  $\varepsilon$

Remarque : la taille de l'image rétinienne correspondante est donnée par :

$$SF' \frac{\varepsilon}{n} = 23.10^{-3} \frac{3.10^{-4}}{1.336} \approx 5.2 \mu m$$

Or le diamètre d'un cône est d'environ  $4\mu$

## **6.2 PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES INSTRUMENTS D'OPTIQUE**

### 6.2.1 CLASSIFICATION ET GÉNÉRALITÉS

On se limite à deux groupes d'instruments d'optique assimilables à des systèmes centrés qui donnent de l'objet une image réelle ou virtuelle plus avantageuse à observer ou à stocker.

Les instruments qui donnent une image réelle constituent le premier groupe : les plus connus sont les objectifs des appareils de projection et les objectifs des appareils photos ou des caméras.

Le rôle des instruments du second groupe est de donner une image virtuelle ayant un diamètre apparent plus grand que l'objet observé à l'oeil nu. les plus connus sont les loupes et les microscopes pour l'examen de petits objets rapprochés et les lunettes pour l'observation des objets très éloignés ou des astres.

Bien que certaines des notions exposées dans ce chapitre soient applicables aux appareils des deux groupes, ce sont surtout les caractéristiques des instruments du second groupe qui sont décrites dans les paragraphes ci-après.

### 6.2.2 GRANDISSEMENT, PUISSANCE ET GROSSISSEMENT

Ces grandeurs permettent de comparer les dimensions linéaires ou angulaires de l'image et de l'objet.

#### Grandissement

Comme pour un dioptré ou une lentille, l'aplanétisme étant réalisé, le grandissement est le rapport d'une dimension linéaire  $A'B'$  de l'image à la dimension linéaire correspondante  $AB$  de l'objet.

C'est un nombre sans dimensions. Il n'est intéressant que dans le cas où l'objet et l'image sont tous les deux à distance finie et tous les deux réels, c'est-à-dire pour des appareils du premier groupe.

$$\Gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \quad (6.1)$$

## Puissance

La puissance n'est définie que pour les instruments du second groupe, comme la loupe ou le microscope, servant à l'observation d'objets très rapprochés.

La puissance d'un instrument est le rapport de l'angle sous lequel on voit l'image donnée par l'instrument à la longueur de l'objet.

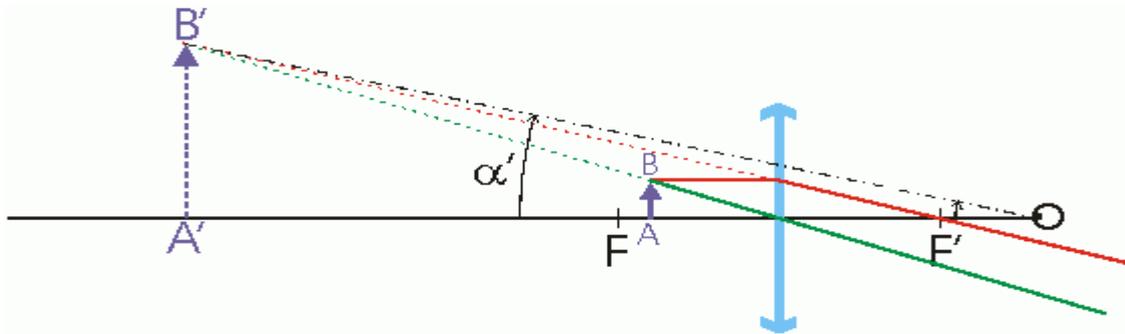


Figure 7:

La figure 7 illustre l'observation d'un petit objet AB à l'aide d'une loupe. Sauf si l'image est à l'infini,  $\alpha'$  dépend de la position de l'oeil.

$$P = \frac{\alpha'}{AB} \quad (6.2)$$

La puissance s'exprime en dioptries si  $\alpha'$  est exprimé en radians et AB en mètres.

## Grossissement.

Cette grandeur est surtout intéressante lorsque l'objet est très éloigné et que l'image observée est virtuelle comme c'est le cas des instruments du second groupe comme les lunettes astronomiques ou terrestres.

La grossissement est le rapport des dimensions des images rétinienne dans la vision à travers l'instrument et dans la vision à l'oeil nu.

Mais les images rétinienne sont dans le rapport des diamètres apparents. Donc G, le grossissement est donné par 6.3. C'est un nombre sans dimensions.

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} \quad (6.3)$$

Dans le cas de l'examen d'objets très rapprochés, à l'aide, par exemple, d'une loupe ou d'un microscope, l'angle est défini en plaçant l'objet au Punctum Proximum P, à la distance  $d = OA$  de l'oeil  $O$ . Dans ce cas :

$$\alpha = \frac{AB}{d} \implies G = \frac{\alpha'}{AB} d$$

donc :

$$G = P.d \quad (6.4)$$

G dépend de l'observateur par l'intermédiaire de d. C'est pour s'affranchir de cette difficulté que le grossissement commercial  $G_C$  est défini en choisissant, pour un oeil moyen et dans un souci de simplification des calculs, la distance minimum de vision distincte d égale à 0,25m.

Si P est en dioptries, on a alors :

$$G_C = \frac{P}{4} \quad (6.5)$$

Il est important de bien comprendre que, dans le cas de l'observation d'objets très éloignés, par exemple dans le cas des étoiles vues à travers une lunette astronomique ou à l'oeil nu, seul  $\alpha$

### 6.2.3 POUVOIR SÉPARATEUR

Le pouvoir séparateur est caractérisé par la plus petite distance entre deux points de l'objet vus séparés à travers l'instrument :

- c'est une distance linéaire si l'objet est à distance finie.

- c'est une distance angulaire si l'objet est " à l'infini ".

Un bon instrument d'optique doit réaliser, par construction, le stigmatisme approché pour les plans observés : à distance finie constante, dans le cas d'une configuration de microscope, ou à l'infini dans le cas d'une lunette astronomique. Le pouvoir séparateur est alors limité, soit par la limite de résolution de l'oeil, soit par la diffraction.

Si on prend en compte l'acuité visuelle, l'image  $AB'$  doit avoir un diamètre apparent supérieur à  $3.10^{-4}$ rd ce qui détermine la valeur minimum de sa longueur  $AB'$  ainsi que la valeur correspondante de AB.

Si on prend en compte la diffraction, on peut montrer que l'éclairement, autour de l'image ponctuelle idéale A d'un point A à travers un instrument ayant une ouverture circulaire, a l'allure indiquée par la figure 8.

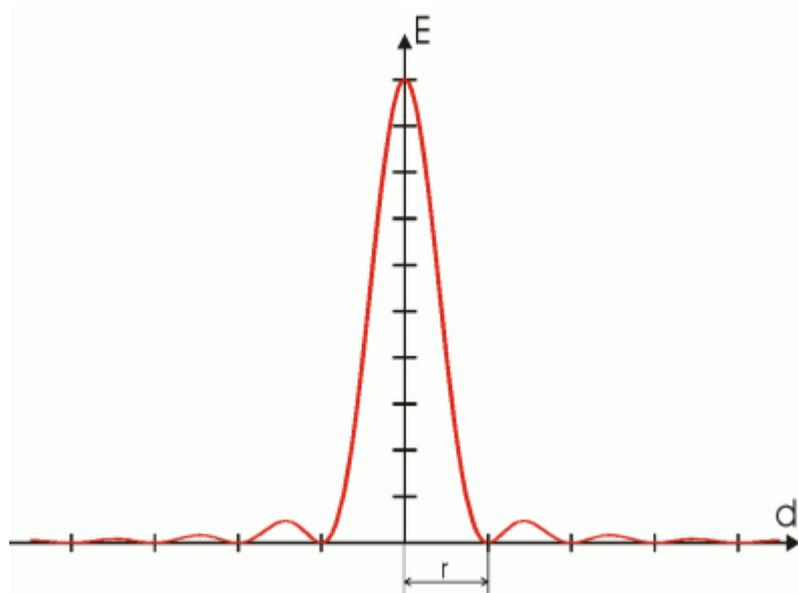


Figure 8:

La tâche centrale, tâche de AIRY, est 50 fois plus éclairée que le premier anneau. On peut calculer le rayon de la tâche de AIRY :

$$r = \frac{1.22\lambda}{2n' \sin u'}$$

où :

$$\lambda$$

u' l'inclinaison maximum sur l'axe des rayons qui arrivent en A.

Deux points A et B seront vus séparés s'ils donnent dans le plan image des tâches de diffraction séparées. Suivant le critère de LORD RAYLEIGH, on admet que ceci est réalisé si la distance entre les tâches est supérieure à leur rayon (figure 9).

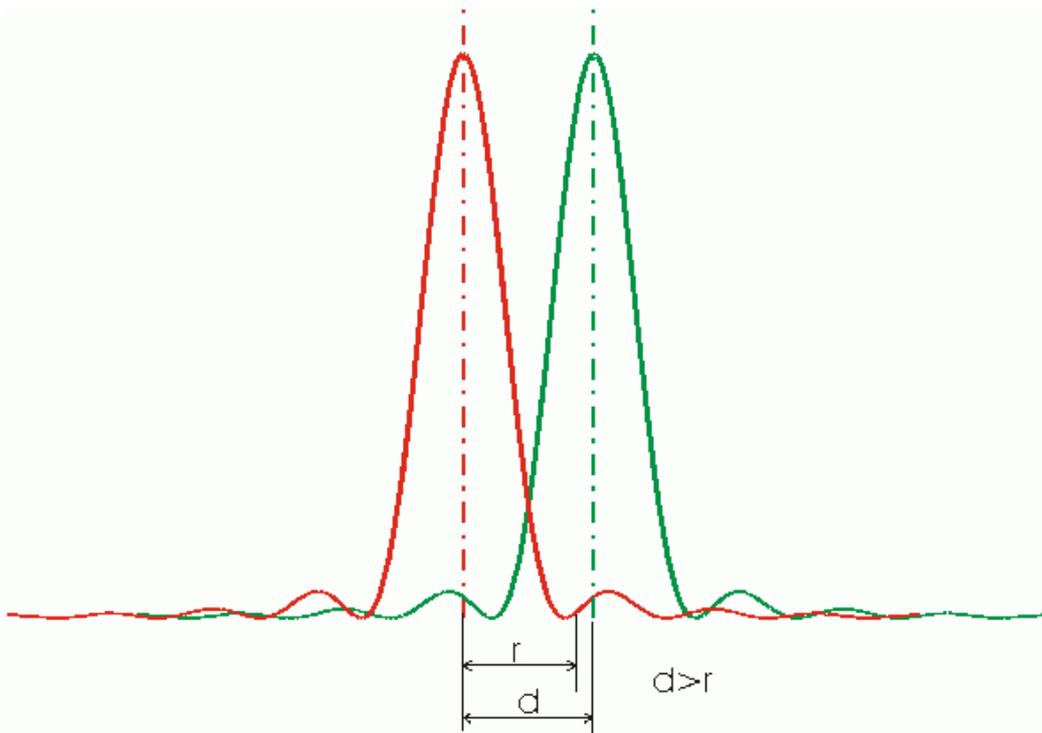


Figure 9:

**La condition  $AB \geq$**

$$AB \geq \frac{1.22\lambda}{2n \sin u}$$

(6.6) où u est l'inclinaison du faisceau incident sur la face d'entrée de l'instrument.

Quand on compare les valeurs calculées en faisant intervenir, soit l'acuité visuelle, soit la diffraction, c'est finalement la plus grande des deux valeurs de AB qui définit le pouvoir séparateur effectif de l'instrument.

# Chapitre 7

## LOUPES, OCULAIRES, MICROSCOPES

Le but de ces instruments est de donner, d'un petit objet, une image virtuelle sous un diamètre apparent aussi grand que possible et située, afin d'éviter toute fatigue d'accommodation, au Punctum Remotum de l'observateur.

### 7.1 LOUPES

Une loupe est une lentille convergente épaisse de courte distance focale. L'objet est placé entre la loupe et le foyer objet.

Pour l'observation, le centre optique noté O de l'oeil est placé au voisinage du foyer image F' de la loupe, comme le montre la figure 1 ci-dessous :

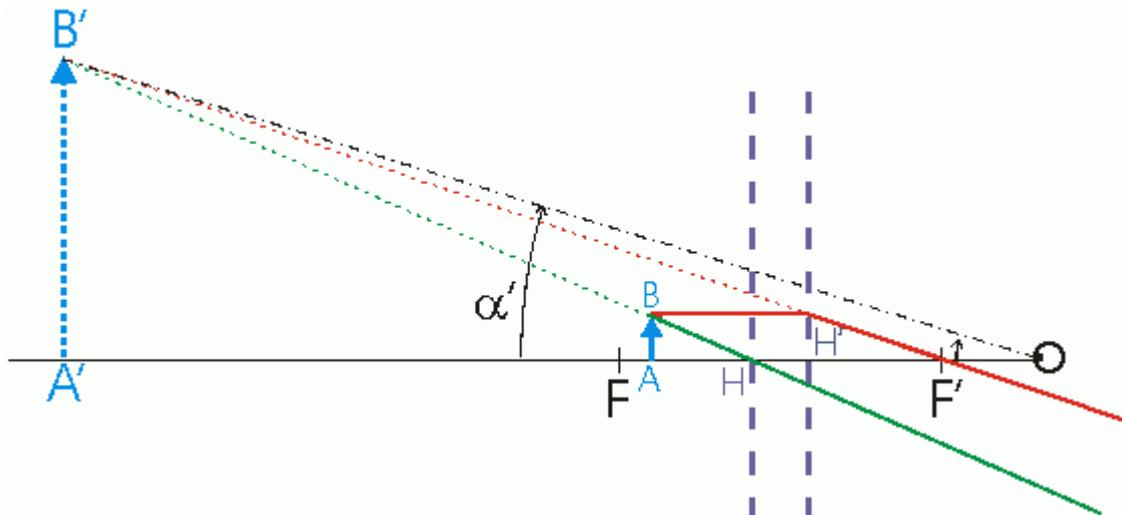


Figure 1:

#### 7.1.1 LATITUDE DE MISE AU POINT

Pour être vue nettement, l'image A'B' doit être située entre le Punctum Remotum R et le Punctum Proximum P de l'oeil. Si  $A_R$  et  $A_P$  désignent les conjugués de R et P, la distance  $A_R A_P$  est la "latitude de mise au point".

On pose :

$RO = D$  (D est la distance maximale de vision distincte),

$PO = d$  (d est la distance minimale de vision distincte),

$F'O = a$ .

La formule de conjugaison de NEWTON appliquée aux couples de points conjugués  $A_R$  et  $R$  d'une part,  $A_P$  et  $P$  d'autre part, donne :

$$\overline{FA_R} \cdot \overline{F'R} = -\Phi^2 \implies \overline{FA_R} = \frac{-\Phi^2}{\overline{F'O} + \overline{OR}} = \frac{\Phi^2}{D - a}$$

et

$$\overline{FA_P} \cdot \overline{F'P} = -\Phi^2 \implies \overline{FA_P} = \frac{-\Phi^2}{\overline{F'O} + \overline{OP}} = \frac{\Phi^2}{d - a}$$

d'où, finalement :

$$\overline{A_R A_P} = \Phi^2 \left( \frac{1}{d - a} - \frac{1}{D - a} \right) \approx \Phi^2 \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{D} \right)$$

Dans le cas d'un oeil normal  $D = \infty$

$$\overline{A_R A_P} \approx \frac{\Phi^2}{d} \quad (7.1)$$

### 7.1.2 PUISSANCE

Par définition, la puissance  $P$  vaut  $\frac{\alpha'}{AB}$ . Or dans les conditions de l'approximation de GAUSS, l'angle  $\alpha'$  reste assez petit de telle sorte que :

$$\alpha' \approx \tan \alpha' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'O}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \frac{\overline{AB}}{\overline{A'O}} = \frac{\overline{A'F'}}{\Phi} \frac{\overline{AB}}{\overline{A'O}}$$

Si on pose  $\delta = \overline{A'O}$  la distance de visée, on a  $\overline{A'F'} = \overline{A'O} + \overline{OF'} = \delta$

$$P = \frac{\delta - a}{\Phi} \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\Phi} \left( 1 - \frac{a}{\delta} \right)$$

Dans le cas général, la puissance dépend de la position de l'oeil de l'observateur ( $a$ ) et de la distance de visée ( $\delta$ ) la puissance prend une valeur caractéristique de la loupe : c'est la "puissance intrinsèque" notée  $P_i$  :

$$P_i = \frac{1}{\Phi} \quad (7.2)$$

## 7.2 OCULAIRES

Les images données par les loupes sont de mauvaise qualité dès que la puissance atteint une vingtaine de dioptries. Pour améliorer cette qualité, tout en gardant une puissance élevée, on remplace les loupes par des "oculaires composés" : c'est-à-dire par des associations de lentilles.

Leur emploi est identique à celui des loupes simples en considérant les oculaires comme des systèmes centrés

possédant des foyers F et F', des plans principaux et " une " distance focale telle que  $\overline{HF'} = \Phi \overline{HF} = -\Phi$

$$\overline{A_R A_P} \approx \frac{\Phi^2}{d} \quad \text{et} \quad P_i = \frac{1}{\Phi}$$

Le problème se réduit donc, à la détermination des éléments cardinaux connaissant les éléments de l'oculaire.

### 7.2.1 CLASSIFICATION ET DESCRIPTION DES OCULAIRES

La plupart des oculaires sont des doublets : un doublet est constitué de deux lentilles minces de distances focales  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  séparées par un intervalle.

$\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et e sont généralement proportionnels à des nombres entiers de telle sorte que :

$$\frac{\Phi_1}{m} = \frac{e}{n} = \frac{\Phi_2}{p} \quad (7.3)$$

avec  $m >$  ou  $< 0$ ,  $n > 0$ ,  $p >$  ou  $< 0$ . L'ensemble des trois entiers " m,n,p " constitue le symbole du doublet.

On distingue les oculaires :

- positif si le foyer objet est devant la première lentille.
- négatif si le foyer objet est derrière la première lentille.
- convergent si le foyer image est derrière la seconde lentille.
- divergent si le foyer image est devant la seconde lentille.

### 7.2.2 EXEMPLE : OCULAIRE 3, 2, 1 D'HUYGENS

Le symbole signifie que :  $\frac{\Phi_1}{3} = \frac{e}{2} = \frac{\Phi_2}{1}$

Les différents éléments composants l'oculaire sont représentés sur la figure 2 avec une unité a arbitraire. L'intervalle optique  $F_1 F_2$  vaut :

$$\overline{F_1' F_2} = \overline{F_1' O_1} + \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 F_2} = -\Phi_1 + e - \Phi_2$$

La position des foyers est obtenue par application des relations [4.12](#) et [4.13](#) :

$$\overline{F_1 F} = -\frac{\Phi_1^2}{F_1' F_2} = \frac{9a}{2} \quad \text{et} \quad \overline{F_2' F'} = \frac{\Phi_2^2}{F_1' F_2} = -\frac{a}{2}$$

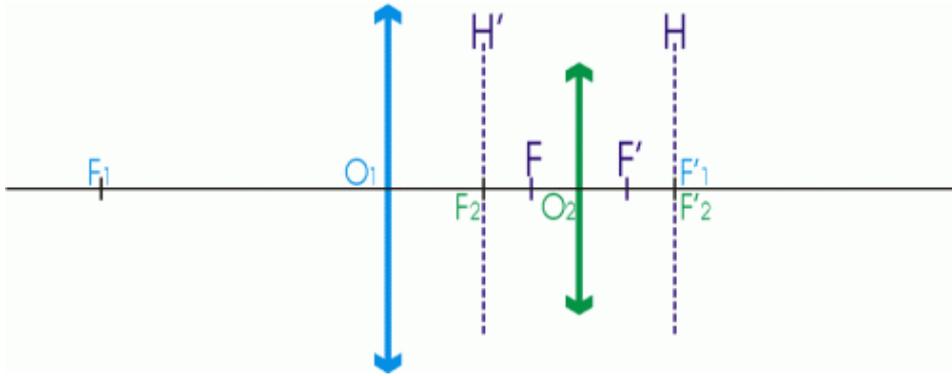


Figure 2:

La distance focale  $\Phi$  4.17 en remarquant que la vergence  $V_1$  du premier système est simplement  $\frac{1}{\Phi_1}$ , la vergence  $V_2$  du second système est  $\frac{1}{\Phi_2}$  et que l'indice  $N$  du milieu entre les deux systèmes est égal à 1 :

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi_1} + \frac{1}{\Phi_2} - \frac{e}{\Phi_1 \Phi_2} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2 - e}{\Phi_1 \Phi_2} = \frac{3a + a - 2a}{3a^2} = \frac{2}{3a}$$

On trouve finalement  $\Phi$  ce qui permet de positionner les plans principaux sur la figure 2.

On voit que l'oculaire 3,2, 1 de HUYGENS est un oculaire négatif et convergent. Sa puissance intrinsèque  $P_i$  est le double de celle de la première lentille utilisée seule comme loupe.

### 7.3 MICROSCOPES

Le microscope sert à l'observation de très petits objets. Sa puissance est beaucoup plus grande que celle d'une loupe : de 100 à 6000 dioptries.

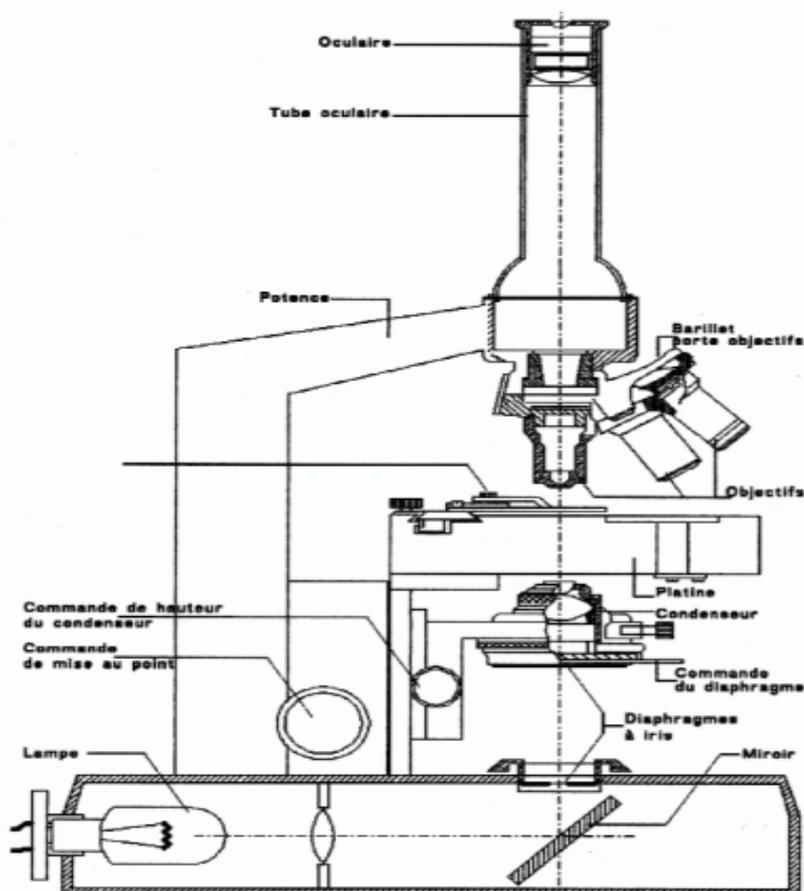


Figure 3:

### 7.3.1 DESCRIPTION GÉNÉRALE

Un microscope réel avec un dispositif de réglage de l'éclairage élaboré est décrit sur la figure de la page voisine. L'instrument proprement dit comporte deux systèmes optiques épais de même axe :

- l'objectif qui donne de l'objet une image réelle très agrandie.
- l'oculaire qui sert à examiner cette image.

La distance entre l'oculaire et l'objectif est fixe de sorte que l'intervalle optique qui caractérise la distance entre le foyer image  $F_1'$  de l'objectif et le foyer objet  $F_2$  de l'oculaire est une constante (par souci de normalisation, de nombreux constructeurs ont fixé cette valeur à 15cm).

#### L'objectif

Il doit donner une image réelle très agrandie à une distance assez faible pour que l'appareil ne soit pas trop encombrant: ce sera donc un système convergent de très petite distance focale (quelques mm). L'objet AB est placé très près et en avant du foyer objet de l'objectif (figure 4) et l'objectif en donne une image réelle  $A'B'$  renversée.

On peut remarquer que le dioptre d'entrée de l'objectif ne travaille pas dans les conditions de l'approximation de GAUSS mais il utilise les propriétés des points de WEIERSTRASS et est corrigé pour réaliser l'aplanétisme : la relation de LAGRANGE HELMHOLTZ est vérifiée et on pourra, malgré tout, utiliser les formules de conjugaison des systèmes centrés car les rayons paraxiaux contribuent à la formation des images.

#### L'oculaire

Il donne l'image définitive  $A''B''$  virtuelle, de même sens que  $AB$  et donc renversée par rapport à  $AB$ . Sa distance focale est de quelques centimètres.

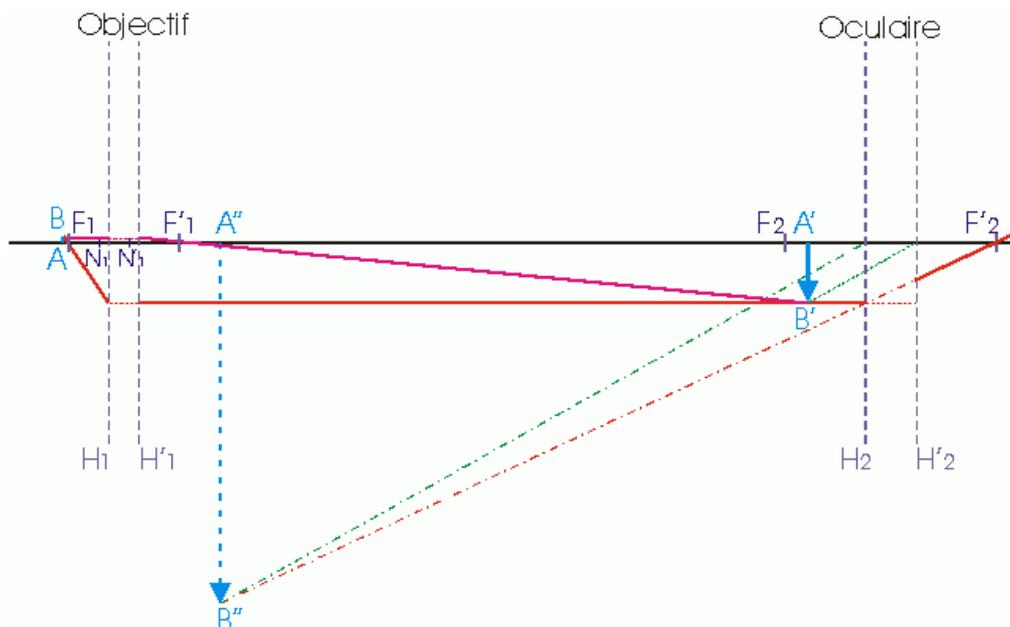


Figure 4:

### Construction de l'image

On utilise les éléments cardinaux des deux systèmes centrés ( voir figure 4). Si l'objectif est "à immersion", sa face avant baigne dans un milieu d'indice  $n$  supérieur à 1 et ses points nodaux  $N_1$  et  $N_1'$  sont distincts de ses points principaux  $H_1$  et  $H_1'$ .

Illustration numérique : pour situer l'ordre de grandeur des différentes quantités étudiées dans ce chapitre on fera à chaque fois l'application numérique (A.N.) pour un microscope dont l'objectif baigne dans l'air avec :

$\Phi_1 = 5\text{mm}$  distance focale de l'objectif,

$\Phi_2 = 2\text{cm}$  distance focale de l'oculaire,

$F_1'F_2 = 15\text{cm}$  intervalle optique.

### Eléments cardinaux du microscope

FOYER IMAGE  $F'$  : on a [4.13](#)

$$\overline{F_2'F'} = \frac{\Phi_2^2}{F_1'F_2} \implies \text{A.N. } \overline{F_2'F'} \approx +2.7\text{mm}$$

Le foyer image du microscope est un peu en arrière du foyer image de l'oculaire.

FOYER OBJET  $F$  : on a

$$\overline{F_1F} = -\frac{\Phi_1^2}{F_1'F_2} \implies \text{A.N. } \overline{F_1F} \approx -0.17\text{mm}$$

Le foyer objet du microscope est un peu en avant du foyer objet de l'objectif.

DISTANCE FOCALE : par application de la formule de GULLSTRAND on a :

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi_1} + \frac{1}{\Phi_2} - \frac{e}{\Phi_1\Phi_2} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2 - e}{\Phi_1\Phi_2} = -\frac{\overline{F_1'F_2}}{\Phi_1\Phi_2}$$

d'où on tire :

$$\Phi = \frac{\Phi_1\Phi_2}{\Phi_1\Phi_2} \implies \text{A.N. } \Phi \approx -0.67\text{mm} \quad (7.4)$$

La distance focale du microscope est très courte et négative. Les foyers sont donc à l'intérieur de l'intervalle des plans principaux comme schématisé sur la figure 4.



Figure 5:

### 7.3.2 PUISSANCE, GROSSISSEMENT, LATITUDE DE MISE AU POINT

#### Première expression de la puissance.

Si  $\overline{A'B'}$  est la grandeur de l'image intermédiaire fournie par l'objectif, par définitions, on a :

le grossissement de l'objectif  $\Gamma_1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ ,

la puissance de l'oculaire  $P_2 = \frac{\alpha''}{\overline{A'B'}}$ ,

la puissance du microscope  $P = \frac{\alpha''}{\overline{AB}}$ , ce qui montre que :

$$P = P_2 \Gamma_1$$

#### Seconde expression de la puissance.

Elle est obtenue en considérant le microscope comme un système épais qui joue le rôle de loupe. Les formules établies pour cet instrument s'appliquent. La puissance est toujours très voisine de la puissance intrinsèque car l'œil est toujours très près du foyer image du système (voir ci-après) et les relations 7.2 et 7.4 donnent immédiatement :

$$P = \frac{1}{\Phi} = -\frac{\overline{F'_1 F_2}}{\Phi_1 \Phi_2} \implies \text{A.N. } P = 1500 \text{ dioptries}$$

Grossissement. On se trouve dans le cas étudié au chapitre précédent. Les relations 6.3 et 6.4 donnent :

$$G = P.d \text{ et } G_C = \frac{P}{4} \implies \text{A.N. } G_C = 375$$

#### Latitude de mise au point.

Les résultats littéraux établis dans le cas de la loupe restent valables pour le système épais que constitue le microscope. On a donc :

$$\overline{A_R A_P} \approx \frac{\Phi^2}{d} \implies \text{A.N. } \overline{A_R A_P} \approx 1.8 \mu\text{m}$$

Ceci montre que le microscope ne permet d'observer que des objets très minces. On comprend aussi que, pour placer l'objet à la distance voulue de la face avant de l'objectif, il est indispensable d'avoir un mécanisme de déplacement extrêmement précis utilisant des vis micrométriques.

### 7.3.3 POSITION DE L'OEIL - CERCLE OCULAIRE

En général, un microscope est construit de telle sorte que tous les rayons issus d'un point de l'axe qui traversent la face d'entrée de l'objectif traversent toutes les lentilles du microscope. L'image de la face frontale de l'objectif donnée par le reste de l'appareil est nommée "cercle oculaire" car c'est là que le faisceau émergeant a sa plus faible section et que l'on doit placer l'œil pour recueillir le maximum de lumière.

Pour déterminer la position du centre C et le rayon  $\rho_{FS_1}$ , on obtient :

$$\overline{FS_1 F'C} = -\Phi^2 \implies \text{A.N. avec } \overline{FS_1} = 2\text{mm} : \overline{F'C} \approx -0.22\text{mm}$$

Le centre du cercle oculaire est en avant du foyer image du microscope et très près de celui-ci. Il est entre le foyer image de l'oculaire et celui du microscope. Pour des calculs approchés on pourra, suivant les simplifications recherchées, considérer que C est confondu avec F' ou que C est confondu avec F<sub>2</sub>'.

Si r désigne le rayon de la face frontale de l'objectif, la formule du grandissement donne :

$$\frac{\rho}{r} = -\frac{\Phi}{FS_1} \implies \text{A.N. avec } r = 1\text{mm} : \rho \approx 0.33\text{mm}$$

Le rayon du cercle oculaire peut avoir une valeur inférieure à celle du rayon de la pupille de l'oeil. Pratiquement l'oeil trouve sa place au cercle oculaire car le microscope est pourvu d'un oeillet adapté sur lequel l'oeil prend appui.

### 7.3.4 POUVOIR SEPARATEUR

Le pouvoir séparateur est la qualité essentielle du microscope. il est caractérisé par la plus petite distance entre deux points de l'objet qui sont vus séparés à travers l'instrument. Dans un microscope de bonne qualité, l'oculaire donne toujours une image séparée de deux points séparés par l'objectif. Mais, celui-ci étant corrigé des aberrations, son pouvoir séparateur dépend de la diffraction. Pour l'objectif deux points A et B sont bien séparés si :

$$AB > [MIN]_{OBJECTIF} \quad \text{avec} \quad [MIN]_{OBJECTIF} = \frac{1.22\lambda}{2n \sin u}$$

Par ailleurs l'image définitive A''B'' ne correspondra à deux points séparés par l'oeil nue si elle est vue sous un diamètre apparent  $\alpha' = 3.10^{-4}$ rd. En faisant intervenir la puissance, ceci implique que les deux points A et B de l'objet satisfassent à la condition :

$$AB > [MIN]_{OEIL} \quad \text{avec} \quad [MIN]_{OEIL} = 3.10^{-4}rd$$

Finalement, deux points A et B seront effectivement vus séparés si leur distance est supérieure aux deux minima définis ci-dessus. Le pouvoir séparateur est caractérisé par la longueur :

$$AB_{SEP} = SUP \{ [MIN]_{OBJECTIF}, [MIN]_{OEIL} \}$$

On appelle " puissance utile " P<sub>U</sub> la valeur de P pour laquelle les deux minima sont égaux. Elle vaut donc :

$$P_U = \frac{6.10^{-4}n \sin u}{1.22\lambda} \quad \text{soit, pour } \lambda \approx 0.5\mu\text{m}$$

$$P_U \approx 10^3 n \sin u \quad (7.5)$$

Si la puissance réelle est inférieure à la puissance utile, le pouvoir séparateur est limité par l'acuité visuelle. Si la puissance réelle est supérieure à la puissance utile, le pouvoir séparateur est limité par la diffraction. Si on augmente P au delà de P<sub>U</sub> l'oeil ne voit pas plus de détails mais voit seulement sous un angle plus grand deux points que l'objectif sépare.

Remarque : pour atteindre le pouvoir séparateur indiqué (correspondant à  $\alpha \approx 4$  rd il faut que l'oeil soit diaphragmé avec un diamètre d'environ 0,5mm. Pour limiter l'effort de l'observateur il est plus pratique de réduire à cette dimension le faisceau entrant dans l'oeil ce qui est possible si le rayon du cercle oculaire vaut 0, 25mm. La puissance correspondante est la " puissance optimum " P<sub>O</sub> dont on peut montrer qu'elle vaut environ 4 P<sub>U</sub>.

