

PHYSIQUE 1

*Département des Technologies Industrielles (TIN)
Tronc commun - Orientations GE, MI, SI*

MÉCANIQUE

Prof. André Perrenoud

T A B L E D E S M A T I E R E S

	<u>PAGE</u>
1. INTRODUCTION.....	1
1.1 CONNAISSANCES PRÉALABLES REQUISES	1
1.2 FORMULAIRES ET LIVRES.....	2
2. CINÉMATIQUE	3
2.1 POSITION, DÉPLACEMENT, TRAJECTOIRE	3
2.2 LA VITESSE	4
2.2.1 Vitesse moyenne vectorielle.....	4
2.2.2 Vitesse instantanée vectorielle	5
2.2.3 Vitesse instantanée scalaire et abscisse curviligne	5
2.3 ACCÉLÉRATION.....	7
2.4 QUELQUES MOUVEMENTS PARTICULIERS.....	9
2.4.1 Le mouvement rectiligne uniforme (MRU)	9
2.4.2 Le mouvement uniformément accéléré (MUA)	9
2.4.3 Le mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA).....	9
2.4.4 Le mouvement circulaire uniforme (MCU).....	10
2.4.5 Rayon de courbure de la trajectoire	11
3. DYNAMIQUE	12
3.1 LES TROIS PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA DYNAMIQUE	12
3.2 TYPES DE FORCES.....	13
3.3 PRINCIPE DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE.....	14
3.3.1 Poids, accélération gravitationnelle	14
3.3.2 Trajectoire d'une particule dans un champ de gravitation constant.....	15
3.3.3 Le problème à 2 corps.....	17
3.3.4 Comment Newton a-t-il trouvé que la force de gravitation était en $1/r^2$?.....	19
3.4 TRAVAIL, ÉNERGIE, PUISSANCE.....	21
3.4.1 Travail.....	21
3.4.1.1 Rappel de quelques propriétés du produit scalaire	22
3.4.2 Énergie	23
3.4.2.1 Énergie cinétique	24
3.4.2.2 Énergie potentielle de gravitation (près de la surface de la Terre).....	25
3.4.2.3 Principe de conservation de l'énergie.....	26
3.4.2.4 Force conservative	26
3.4.2.5 Énergie potentielle de gravitation (cas général)	27
3.4.3 Puissance.....	28
3.4.3.1 Puissance d'une force déplaçant son point d'application	28
3.5 MOMENT, COUPLE.....	29
3.5.1 Moment d'une force.....	30
3.5.1.1 Rappel de quelques propriétés du produit vectoriel.....	31
3.5.2 Couple	32
3.5.3 Composition des forces	33
3.5.4 Mouvement du solide.....	35
3.5.5 Condition d'équilibre d'un solide	35
3.5.6 Centre de gravité	37
3.6 QUANTITÉ DE MOUVEMENT.....	38
3.6.1 Conservation de la quantité de mouvement	38
3.6.2 Les collisions.....	39
3.6.3 Impulsion.....	40

3.7	MOUVEMENT HARMONIQUE.....	41
3.7.1	Masse suspendue à un ressort.....	41
3.7.2	Le pendule.....	43
3.7.3	Énergies cinétique est potentielle dans le cas du mouvement harmonique.....	44
3.8	FORCES DE FROTTEMENT.....	45
3.8.1	Frottement statique.....	45
3.8.2	Frottement dynamique.....	46
3.8.3	Forces aérodynamiques.....	47
3.8.3.1	Exemple : Chute des corps en tenant compte de la résistance de l'air.....	48
3.9	FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES.....	50
3.9.1	Force électrique entre deux charges ponctuelles.....	50
3.9.1.1	Mouvement d'une particule dans un champ électrique uniforme.....	51
3.9.2	Force magnétique.....	52
3.9.2.1	Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme.....	53
3.10	MOMENT CINÉTIQUE.....	54
3.10.1	Moment cinétique d'une particule.....	54
3.10.1.1	Moment cinétique d'une particule en mouvement circulaire uniforme.....	55
3.10.1.2	Moment cinétique d'une particule en mouvement circulaire non uniforme.....	56
3.10.2	Vitesse aréolaire – Loi des aires.....	57
3.10.3	Moment cinétique d'un ensemble de particules.....	57
3.10.4	Moment cinétique d'un solide en rotation.....	58
3.11	DYNAMIQUE DU SOLIDE.....	60
3.12	DYNAMIQUE DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN.....	61
4.	MÉCANIQUE DES MILIEUX DÉFORMABLES.....	63
4.1	LES SOLIDES.....	64
4.1.1	Contrainte.....	64
4.1.2	Déformation.....	64
4.1.3	Cisaillement.....	67
4.1.4	Torsion.....	68
4.2	LES LIQUIDES.....	69
4.2.1	Pression.....	69
4.2.2	Hydrostatique.....	70
4.2.3	La pression atmosphérique.....	72
4.2.4	Poussée d'Archimède.....	73
4.2.5	Compressibilité d'un liquide.....	73
4.3	LES GAZ.....	74
4.3.1	Coefficient de compressibilité d'un gaz parfait.....	75
4.3.2	Variation de la pression d'un gaz selon la hauteur.....	76
4.3.3	Mélanges de gaz.....	77

1. INTRODUCTION

1.1 CONNAISSANCES PRÉALABLES REQUISES

- Mathématiques 1 (MAE1) : algèbre, géométrie plane, trigonométrie, calcul vectoriel, dérivation et intégration de fonctions élémentaires.
- Introduction à la physique (IPH) : système international d'unités, optique géométrique, notions de mécanique, introduction aux travaux de laboratoire.

Plan du cours

Selon le nouveau plan d'étude Bachelor, le cours de physique de première année est divisé en deux unités d'enseignement : Introduction à la physique (IPH) et Physique 1 (PHY1).

IPH - semestre d'hiver (64 périodes)

- **Introduction**
Le système d'unités SI, usage des unités et des préfixes, quelques rappels mathématiques.
- **Optique géométrique**
Etude la propagation des rayons lumineux. Lois de la réflexion et de la réfraction. Dispersion de la lumière par un prisme. Lentilles minces. L'œil humain. Instruments d'optique : loupe, microscope, télescope.
- **Mécanique**
(Sans faire appel aux notions de dérivées et d'intégrales.)
Cinématique du point matériel, position, vitesse, accélération. Trajectoires planes.
Dynamique, principes fondamentaux, notion de force, distinction entre la masse et le poids.
- **Mesures, introduction au laboratoire**
Estimation des incertitudes, propagation des erreurs. Vérification graphique d'une loi physique. Régression linéaire.

PHY1 – semestre d'été (112 périodes)

- **Mécanique**
Cinématique, rappel des notions déjà vues, expressions différentielles des observables, trajectoires quelconques.
Dynamique du point matériel. Lois de Newton. Travail, puissance, énergie cinétique, énergie potentielle. Oscillateur harmonique. Quantité de mouvement, lois de conservation. Mouvement d'une particule dans un champ de gravitation, dans un champ électrique, dans un champ magnétique. Applications au tube cathodique, au spectromètre de masse, aux accélérateurs de particules.
- **Thermodynamique et transferts de chaleur**
Dilatation des solides, des liquides et des gaz. Notions de température et de chaleur. Chaleurs spécifiques. Diagrammes de phase. Transferts de chaleur, Cycles thermodynamiques.

Les cours sont complétés par de exercices.

En 2^{ème} année, le cours PHY2 est consacré à l'électromagnétisme et aux ondes.

1.2 FORMULAIRES ET LIVRES

Formulaires et tables CRM - Commissions romandes de mathématique, de physique et de chimie, éd, du Tricorne, ISBN 2-8293-0060-7

FORTEC – Formulaire Technique, Charles Pache, Editec, 2002.

GIECK – Formulaire Technique, 11^e édition, Gieck Verlag GmbH, ISBN 978 3 379 000 26 0.

Pour une introduction illustrée :

Physique - Chimie, Paul Avanzi, Alain Kespy, Jacques Perret-Gentil, Daniel Pfistner, éd. L.E.P., 1992, ISBN 2-606-00577-5.

Physique, Eugene Hecht., De Boeck Université, Paris, troisième tirage, 2003, ISBN 2-7445-0018-6.

Sur Internet : L'encyclopédie en ligne Wikipedia : <http://fr.wikipedia.org> donne une foule de renseignements sur les phénomènes physiques.

Métrologie et unités :

Unités de mesure, Office fédéral de Métrologie (METAS).
www.metas.ch

Mécanique

Physique Générale 1. Mécanique et Thermodynamique, Douglas Giancoli, De Boeck, Physique, Broché, 1993, Paris, ISBN 2-8041-1700-6.

Physique, Vol. 1. Mécanique, Harris Benson, De Boeck Université, Paris, 2004-2005, ISBN 2-8041-4549-2.

Physique, Vol. 1. Mécanique, David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, Dunod, Sciences sup, Broché, 2003, 324 pages, ISBN 2-10008-1462.

2. CINÉMATIQUE

En physique, la mécanique s'intéresse aux mouvements des corps matériels. Elle est divisée en deux grands chapitres : la cinématique et la dynamique.

Déf. La cinématique est la subdivision de la mécanique dont l'objet est l'étude quantitative du mouvement des corps matériels, indépendamment des forces qui produisent ce mouvement, mais en tenant compte du temps.

Déf. La dynamique est l'étude du mouvement des corps en fonction des forces qui s'exercent sur eux.

Les observables cinématiques, position, vitesse, accélération ont été introduites dans le cours IPH sans faire explicitement appel au calcul différentiel. On arrive ainsi à traiter les mouvements simples, tels que rectiligne uniforme (MRU), uniformément accéléré (MRUA) ou circulaire uniforme (MCU). Pour des mouvements plus complexes, le calcul différentiel s'avère indispensable. Nous commençons donc ce chapitre par définir les observables cinématiques en utilisant le formalisme du calcul différentiel.

Nous allons d'abord étudier le mouvement des particules. Dans bien des cas, nous pouvons faire abstraction de la forme exacte du corps matériel, aussi appelé **mobile**, et nous intéresser qu'à son mouvement. Par exemple, si l'on parle de la vitesse d'une voiture, on n'est pas intéressé à d'autres caractéristiques, comme ses dimensions. **La particule est un point géométrique sans dimensions, mais doué d'une masse.** On désigne aussi une particule par le terme de **point matériel**.

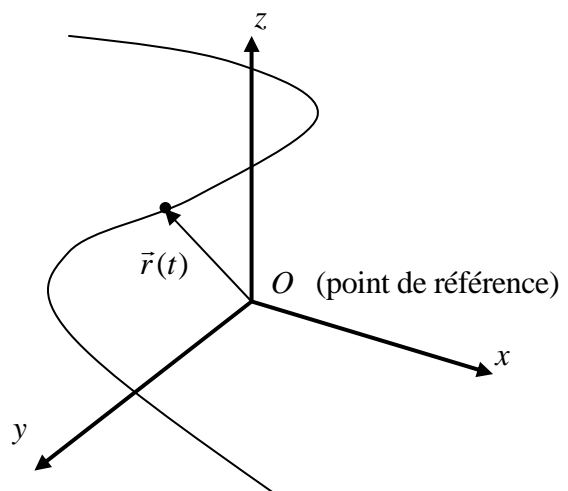
2.1 POSITION, DÉPLACEMENT, TRAJECTOIRE

Déf. La position d'une particule est un vecteur qui a comme origine un point de référence et comme extrémité le point où se trouve la particule.

Dans un système de coordonnées $Oxyz$, la position est un vecteur formé de trois fonctions du temps.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Le mouvement de la particule est connu à tout instant lorsqu'on peut écrire explicitement ces trois fonctions.

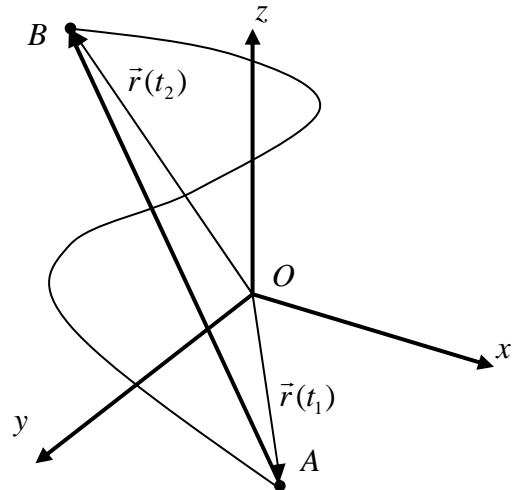


C'est ce qu'on appelle **les équations du mouvement**.

Déf. Le déplacement est une grandeur vectorielle qui caractérise un changement de position. Si une particule se déplace d'un point A à un point B , le déplacement est le vecteur \overrightarrow{AB} .

Le déplacement est indépendant du chemin parcouru pour aller de A à B .

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$



Déf. La trajectoire d'une particule est le lieu de ses positions successives.

Dans le dessin ci-dessus, A est l'**origine** de la trajectoire, B son **aboutissement**. La longueur de la trajectoire (la distance parcourue) est plus grande ou égale à la longueur du déplacement entre A et B . Il y a égalité lorsque la trajectoire est rectiligne.

La cinématique décrit le mouvement d'une particule en donnant sa position à chaque instant. Nous voyons qu'ici intervient la notion de temps. Dans le système SI, l'unité de temps est la seconde, s en abrégé, avec les multiples suivants :

$$60 \text{ s} = 1 \text{ min} \quad 60 \text{ min} = 1 \text{ h} \quad 24 \text{ h} = 1 \text{ jour} \quad 1 \text{ année} = 365,242 \ 198 \ 79 \text{ jours.}$$

2.2 LA VITESSE

2.2.1 Vitesse moyenne vectorielle

Déf. La vitesse moyenne vectorielle d'une particule est le quotient du déplacement par le temps écoulé.

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad [\text{m/s}] \quad (2.2)$$

Ce quotient nous donne le nombre de mètres parcourus par la particule par unité de temps, c'est-à-dire par seconde, selon chacune des trois directions de l'espace. Dans le système SI, l'unité de vitesse est le mètre par seconde, m/s en abrégé.

2.2.2 Vitesse instantanée vectorielle

La vitesse moyenne définie précédemment ne nous donne qu'une idée grossière du mouvement. Pour affiner la description, il faut prendre la moyenne du déplacement sur des intervalles de temps les plus petits possibles. Soit $\vec{r}(t)$ la position de la particule au temps t et $\vec{r}(t + \Delta t)$ sa position au temps $t + \Delta t$. La vitesse instantanée s'obtient comme la limite du quotient du déplacement par l'intervalle de temps lorsque celui-ci tend vers zéro. Mathématiquement, cette opération est la **dérivée** de la position, d'où la définition suivante.

Déf. La vitesse instantanée d'une particule est la dérivée de la position par rapport au temps.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad [\text{m/s}] \quad (2.3)$$

La vitesse instantanée est un vecteur **tangent** à la trajectoire.

Exemple : l'équation du mouvement d'une particule est donnée par :

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4t + 5 \\ -3t + 4 \\ -5t^2 \end{pmatrix} \quad [\text{m}]$$

En dérivant chaque composante par rapport au temps, on trouve sa vitesse instantanée :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -10t \end{pmatrix} \quad [\text{m/s}]$$

2.2.3 Vitesse instantanée scalaire et abscisse curviligne

Déf. La vitesse instantanée scalaire est le module de la vitesse instantanée vectorielle.

$$v(t) = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} \quad [\text{m/s}] \quad (2.4)$$

Ainsi, en reprenant l'exemple ci-dessus, $v(t) = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-10t)^2} = \sqrt{100t^2 + 25}$ [m/s]

Note : Pour alléger l'écriture, on peut écrire \vec{r} pour $\vec{r}(t)$, x pour $x(t)$ etc... La dépendance temporelle est sous-entendue. Selon le contexte, il y a parfois lieu de la préciser.

Souvent, le *module* du vecteur vitesse est appelé *vitesse* ; afin d'éviter la confusion, on emploie aussi le terme de **célérité**.

Pendant un intervalle de temps infinitésimal dt , le déplacement de la particule est de dx selon x , dy selon y , dz selon z . La longueur du déplacement ds est alors égale à :

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \quad (2.5)$$

En comparant cette expression avec la définition de la vitesse instantanée scalaire (2.4) :

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (2.6)$$

En intégrant, on définit ce qu'on appelle **l'abscisse curviligne**, qui sert à repérer la position de la particule le long de sa trajectoire.

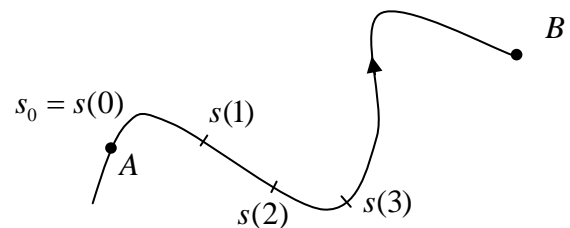
$$s(t) = s_0 + \int_0^t v(t') dt' \quad (2.7)$$

Au temps $t = 0$: $s_0 = s(0)$

Au temps $t = 1$: $s_1 = s(1)$

Au temps $t = 2$: $s_2 = s(2)$

....



L'abscisse curviligne mesure donc la distance parcourue le long de la trajectoire. Sur une voiture, c'est le rôle du compteur kilométrique. La vitesse instantanée scalaire est donnée par le compteur de vitesse ou **tachymètre**.

Le calcul mathématique de l'abscisse curviligne peut donner lieu parfois à des calculs difficiles, l'intégration n'étant pas toujours possible analytiquement.

En reprenant l'exemple de la page précédente : $\frac{ds}{dt} = \sqrt{100t^2 + 25}$

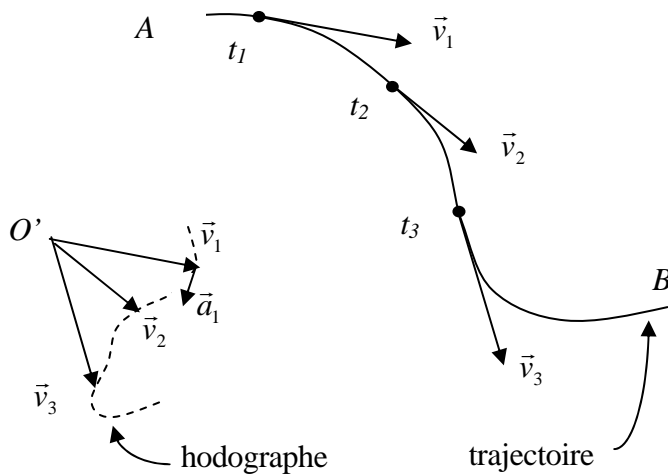
Dans ce cas on peut intégrer :

$$s(t) = s_0 + \frac{1}{2} \left[t\sqrt{100t^2 + 25} + 2,5 \ln(10t + \sqrt{100t^2 + 25}) \right]$$

(L'intégrale d'une fonction de la forme $\sqrt{t^2 + a^2}$, avec $a = \text{cste}$, se trouve dans les tables.)

2.3 ACCÉLÉRATION

Considérons à nouveau une particule décrivant une trajectoire quelconque donnée par son équation du mouvement sous forme vectorielle $\vec{r} = \vec{r}(t)$. En dérivant par rapport au temps, on connaît sa vitesse instantanée vectorielle à tout instant $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Nous pouvons faire une représentation graphique dans laquelle, à partir d'une origine fixe, on reporte le vecteur vitesse instantanée. L'extrémité de ce vecteur décrit une certaine trajectoire, appelée **hodographe**.



Variation de la vitesse vectorielle de l'instant t_i à l'instant t_{i+1} :

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i$$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

A la limite : $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

Déf. L'accélération instantanée d'une particule est la dérivée de la vitesse par rapport au temps.

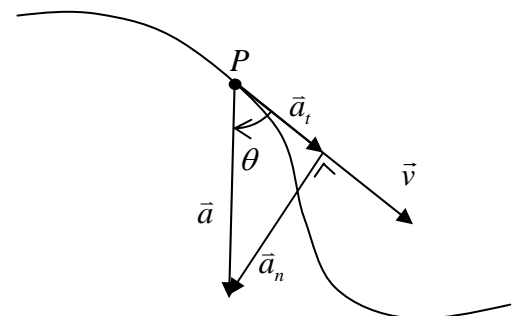
$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad [\text{m/s}^2] \quad (2.8)$$

Le vecteur accélération est tangent à l'hodographe. En revanche, il n'est généralement pas tangent à la trajectoire. Mais on peut le décomposer en composantes tangentielle et normale à la trajectoire.

Soit θ l'angle entre \vec{a} et \vec{v} .

Par définition du produit scalaire : $\cos \theta = \left(\frac{\vec{v}}{v}\right) \cdot \left(\frac{\vec{a}}{a}\right)$

En projetant \vec{a} sur \vec{v} : $a_t = (a \cos \theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v}$



Accélération tangentielle $a_t = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} \quad [\text{m/s}^2] \quad (2.9)$

L'accélération tangentielle est la dérivée de la vitesse scalaire.

En effet, en dérivant l'expression de la vitesse scalaire $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, on obtient :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v}$$

qui est bien l'expression (2.9) de l'accélération tangentielle établie géométriquement. Nous retiendrons donc la définition suivante :

Déf. L'accélération tangentielle d'une particule est la dérivée de la vitesse scalaire par rapport au temps.

La vitesse scalaire étant la dérivée de l'abscisse curviligne, il résulte que l'accélération tangentielle en est la dérivée seconde. En résumé

$$\text{Accélération tangentielle} \quad a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} \quad [\text{m/s}^2] \quad (2.10)$$

Vectoriellement, l'accélération tangentielle s'écrit : $\vec{a}_t = a_t \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v^2} \vec{v}$

et l'accélération normale : $\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$

Comme \vec{a}_n , \vec{a}_t et \vec{a} forment un triangle rectangle : $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$

Suite de l'exemple :

La vitesse était donnée par : $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -10t \end{pmatrix}$; son module par $v = \sqrt{100t^2 + 25}$

Accélération : $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$; module : $a = 10 \text{ m/s}^2$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{100t}{\sqrt{100t^2 + 25}} = \frac{10t}{\sqrt{t^2 + 0,25}} \quad [\text{m/s}^2]$$

$$a_n = \sqrt{100 - \frac{(10t)^2}{t^2 + 0,25}} = \sqrt{\frac{25}{t^2 + 0,25}} = \frac{5}{\sqrt{t^2 + 0,25}} \quad [\text{m/s}^2]$$

2.4 QUELQUES MOUVEMENTS PARTICULIERS

2.4.1 Le mouvement rectiligne uniforme (MRU)

Déf. Un mouvement est dit rectiligne uniforme si la trajectoire est une droite et si la vitesse est constante.

Désignons la vitesse par \vec{v}_0 . La vitesse étant la dérivée de la position, on trouve la position en intégrant par rapport au temps

$$\text{MRU} \quad \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \quad [\text{m}] \quad (2.11)$$

La constante d'intégration, \vec{r}_0 , s'identifie avec la position initiale.

En composantes, on a explicitement :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x}t + x_0 \\ v_{0y}t + y_0 \\ v_{0z}t + z_0 \end{pmatrix}$$

2.4.2 Le mouvement uniformément accéléré (MUA)

Déf. Un mouvement est dit uniformément accéléré si l'accélération est constante.

Désignons l'accélération par \vec{a}_0 . L'accélération étant la dérivée seconde de la position, on trouve la vitesse en intégrant deux fois par rapport au temps.

$$\text{MUA} \quad \vec{r}(t) = \frac{1}{2} \vec{a} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \quad [\text{m}] \quad (2.12)$$

Les constantes d'intégration sont \vec{r}_0 , la position initiale et \vec{v}_0 , la vitesse initiale.

En composantes, on a explicitement :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)a_{0x}t^2 + v_{0x}t + x_0 \\ (1/2)a_{0y}t^2 + v_{0y}t + y_0 \\ (1/2)a_{0z}t^2 + v_{0z}t + z_0 \end{pmatrix}$$

2.4.3 Le mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

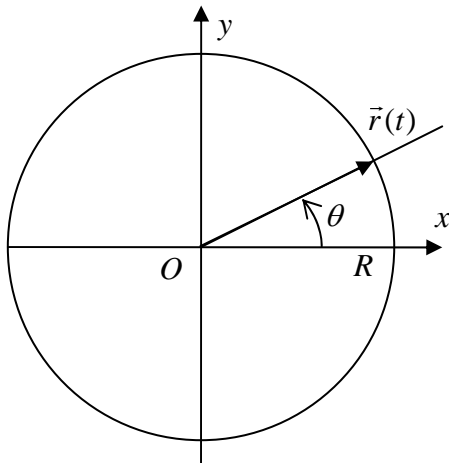
Déf. Un mouvement est dit uniformément accéléré si la trajectoire est une droite et si l'accélération est constante.

C'est un cas particulier du MUA où la vitesse initiale est parallèle à l'accélération initiale (ou éventuellement nulle).

2.4.4 Le mouvement circulaire uniforme (MCU)

Déf. Le mouvement circulaire uniforme (MCU) est le mouvement d'une particule dont la trajectoire est un cercle et dont la vitesse scalaire est constante.

Pour repérer la position de la particule, prenons un système de coordonnées polaires avec comme origine le centre du cercle décrit par la particule.



Soit R le rayon du cercle.

$$\text{Position de la particule : } \vec{r} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix}$$

A chaque instant, la position angulaire est donnée par $\theta = \theta_0 + \omega t$

où ω est la **vitesse angulaire**.
(constante)

L'unité de ω est le rad/s.

$$\text{MCU, position} \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\theta_0 + \omega t) \\ R \sin(\theta_0 + \omega t) \end{pmatrix} \quad [\text{m}] \quad (2.13)$$

$$\text{Vitesse} \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -\omega R \sin(\theta_0 + \omega t) \\ \omega R \cos(\theta_0 + \omega t) \end{pmatrix} \quad [\text{m/s}] \quad (2.13')$$

$$\text{Accélération} \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -\omega^2 R \cos(\theta_0 + \omega t) \\ -\omega^2 R \sin(\theta_0 + \omega t) \end{pmatrix} \quad [\text{m/s}^2] \quad (2.13'')$$

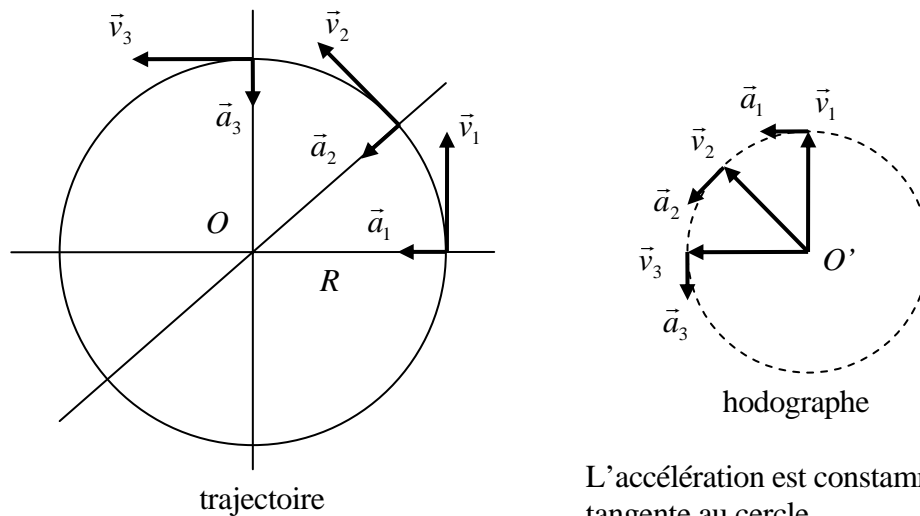
On constate que le produit scalaire du vecteur position et du vecteur vitesse est nul ; donc la vitesse est constamment perpendiculaire au vecteur position.

$$\text{Module de la vitesse} \quad \boxed{v = \omega R} \quad [\text{m/s}] \quad (2.14)$$

Le vecteur accélération est parallèle au vecteur position, mais son sens est opposé. On parle d'**accélération centripète** (dirigée vers le centre du cercle.)

$$\text{Accélération normale} \quad \boxed{a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}} \quad [\text{m/s}^2] \quad (2.15)$$

L'accélération est donc perpendiculaire à la vitesse. L'accélération tangentielle est nulle.



L'accélération est constamment tangente au cercle.

2.4.5 Rayon de courbure de la trajectoire

La relation (2.15) montre que l'accélération normale est égale au carré de la vitesse divisé par R , le rayon du cercle. Dans le cas d'une trajectoire quelconque, cette relation est également valable à tout instant : il suffit de remplacer R par le rayon de courbure de la trajectoire, ρ , qui est en général fonction du temps : $\rho = \rho(t)$.

Accélération normale

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad [\text{m/s}^2]$$

(2.16)

Utilisons cette relation pour calculer le rayon de courbure de la trajectoire dans le cas de l'exemple vu précédemment :

La vitesse scalaire était donnée par $v = \sqrt{100t^2 + 25}$ [m/s]

L'accélération normale par $a_n = \frac{50}{\sqrt{100t^2 + 25}}$ [m/s²]

D'où le rayon de courbure : $\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(100t^2 + 25)^{3/2}}{50}$ [m]

Historique

On doit à Sir Isaac Newton (1642 – 1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) la systématisation du calcul infinitésimal. Newton publia ses résultats dans un ouvrage de mécanique, « Les principes mathématiques de la philosophie naturelle ». Les notions de vitesse, accélération, tangente, courbure, aire d'une surface sous la courbe d'une fonction y sont exposées. L'apport de Leibniz concerne les règles de calcul de la différentiation et les notations encore en vigueur aujourd'hui pour les différentielles et les intégrales.

3. DYNAMIQUE

Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord brièvement les principes de base présentés dans le cours d'introduction à la physique (IPH). Ensuite nous verrons les notions de travail, puissance quantité de mouvement. Nous verrons comment les notions introduites dans le cas du point matériel s'étendent naturellement au cas du solide.

3.1 LES TROIS PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA DYNAMIQUE

Toutes les connaissances de la mécanique dite classique : dynamique, statique, hydrodynamique, résistance des matériaux, etc... sont basées sur trois principes (ou lois), publiés par Isaac Newton¹ en 1687. La base de ces principes est expérimentale, c'est-à-dire que leurs énoncés sont les conséquences d'observations faites sur les phénomènes de la nature. La seule justification qu'on puisse leur donner consiste dans le fait que les théories qu'ils ont permis de développer sont bien conformes au comportement de la nature.

Premier principe (principe d'inertie)

Une particule ne subissant aucune action extérieure conserve une vitesse constante en amplitude, direction et sens.

La tendance naturelle de tout corps matériel à conserver son mouvement est une propriété générale qu'on appelle l'**inertie**. Un objet au repos reste au repos s'il ne subit aucune force extérieure. C'est le cas particulier où la vitesse est nulle et reste nulle. Le premier principe signifie donc qu'un système mécanique en mouvement a une tendance naturelle à conserver son mouvement, à moins qu'un autre système mécanique n'agisse sur lui pour modifier sa vitesse, c'est-à-dire lui communiquer une accélération. Ce fait était déjà connu de Galilée (1564 – 1642) ; le mérite de Newton a été de le formaliser. On appelle **référentiel galiléen** ou de **référentiel d'inertie** un référentiel dans lequel la trajectoire d'une particule ne subissant aucune force extérieure est rectiligne.

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{constante} \quad (3.1)$$

Deuxième principe (principe ou loi de Newton)

L'accélération d'une particule est directement proportionnelle à la force appliquée sur cette particule et inversement proportionnelle à sa masse.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \quad [\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2]=[\text{N}] \quad (3.2)$$

En l'honneur de Sir Isaac Newton, l'unité de force a reçu le nom de newton, N en abrégé.

¹ Isaac Newton, Woolsthorpe, Lincolnshire 1642 – Londres, 1727.

Remarquons que le premier principe peut se déduire du deuxième. En effet si aucune action n'agit sur la particule, alors la force est nulle, ainsi que l'accélération, en vertu du 2^{ème} principe.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = cste$$

ce qui est conforme au 1^{er} principe.

Troisième principe (principe de l'action et de la réaction)

Si une particule 1 exerce une force sur une particule 2, alors la particule 2 exerce une force égale et opposée sur la particule 1.

Soit \vec{F}_{21} = force exercée par **1** sur **2** et \vec{F}_{12} = force exercée par **2** sur **1**.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad [\text{N}] \quad (3.3)$$

Un exemple classique de l'application de ce principe est la propulsion d'une fusée. La force nécessaire à l'éjection des gaz par la tuyère produit par réaction une force qui propulse la fusée.

3.2 TYPES DE FORCES

La dynamique étudie le mouvement des corps en fonction des forces qui agissent sur eux. Le mouvement va donc dépendre des forces en présence dans chaque situation. On connaît actuellement **4 types de forces fondamentales** en physique :

- la **force de gravitation**, toujours attractive, responsable du mouvement des astres, prépondérante à grande échelle ;
- la **force électrique**, entre particules chargées, responsable de la cohésion des atomes et des liaisons chimiques ;
- la **force nucléaire** (ou forte), responsable de la cohésion des noyaux atomiques ;
- la **force faible**, à l'origine de certaines désintégrations radioactives.

Les autres forces habituellement rencontrées en physique sont en quelque sorte des conséquences des 4 forces fondamentales :

- le poids, qui est la force d'attraction que la Terre exerce sur chaque objet ;
- les forces de frottement (frottement sec, frottement visqueux, traînée aérodynamique) ;
- la force magnétique ;
- les forces élastiques (ressort) ou non susceptibles de déformer les corps matériels ;
-

3.3 PRINCIPE DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE

Newton est avant tout célèbre pour avoir énoncé la loi de la gravitation universelle, déduite de l'étude des trajectoires des planètes.

Chaque particule de matière attire toute autre particule avec une force de gravitation. L'amplitude de cette force est proportionnelle au produit des masses des particules et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. Cette force agit comme une attraction selon la direction joignant les positions des particules.

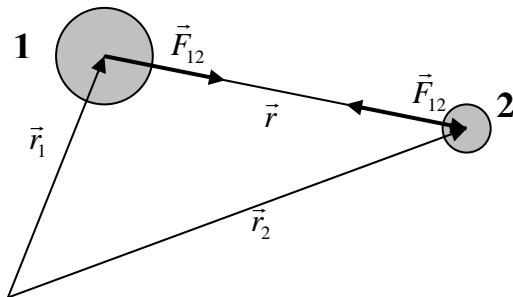
Sous forme scalaire :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (3.4)$$

Sous forme vectorielle :

$$\vec{F} = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (3.4')$$

Cette loi est aussi valable pour des corps de forme sphérique. La force s'exerce selon la droite joignant les centres.



Le système étant supposé isolé, la force d'attraction de 2 sur 1 est l'opposée de la force de 1 sur 2 (principe de l'action et de la réaction).

$\vec{F} = \vec{F}_{21}$ = force exercée sur le corps 2 par le corps 1

La constante G est un nombre fixe qu'on appelle constante de la gravitation universelle.

$$G = 6,673\,2 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$$

Cette constante est extrêmement petite, ce qui explique qu'on ne remarque pas l'action gravifique entre deux objets ordinaires. Elle a été mesurée pour la première fois en laboratoire par Henry Cavendish en 1798.

3.3.1 Poids, accélération gravitationnelle

Déf. On appelle poids d'un corps, la force d'attraction gravitationnelle que la Terre exerce sur ce corps.

C'est une **force** verticale, dirigée vers le bas, qui varie avec le lieu et l'altitude. Cependant les différences d'altitude qui sont à notre portée dans la vie courante sont en général négligeables

vis-à-vis du rayon terrestre, ce qui fait que dans la plupart des cas on considère le poids comme constant.

La verticale d'un lieu est définie comme la direction de la force de gravitation. L'horizontale est définie comme le plan perpendiculaire à la verticale. Par définition, la verticale passe par le centre de Terre (si l'on admet qu'elle est homogène et de forme sphérique).

Un corps en chute libre étant soumis à une force \vec{F} en direction du centre de la Terre, il s'ensuit d'après le deuxième principe qu'il subit une accélération. En combinant (3.4) et le deuxième principe (3.2), on obtient :

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (3.5)$$

m étant la masse du corps. Cette accélération est appelée **accélération terrestre**, et on la désigne par \vec{g} . En un point donné, g est constante, car F est proportionnelle à m .

La force agissant sur le corps en chute libre est son poids. D'où la définition du poids qui est égal au produit de la masse par l'accélération terrestre.

Poids d'un corps de masse m $\vec{w} = m\vec{g}$ (3.6)

A la surface de la Terre, le module de \vec{g} vaut, selon (3.4) : $g = \frac{GM}{R^2}$ où M est la masse de Terre et R son rayon. A cause de la rotation de la Terre sur elle-même, du fait qu'elle n'est ni parfaitement sphérique, ni tout à fait homogène, la valeur exacte de g dépend du lieu où l'on se trouve.

La valeur standard de g est $9,806\ 65\ \text{m/s}^2$. La valeur usuelle est $9,81\ \text{m/s}^2$.

Le poids standard d'une masse de 1 kg vaut donc $9,806\ 65\ \text{N}$

En technique, on utilise aussi le kilopond (kp) ou le kilogrammeforce (kgf).

(On trouve parfois aussi kg^* , ou kilo-poids, mais ce n'est pas officiel.)

3.3.2 Trajectoire d'une particule dans un champ de gravitation constant

Pour des petits mouvements, proches de la surface de la Terre, on peut donc considérer le vecteur \vec{g} comme constant et dirigé vers le bas. Dans un repère $Oxyz$, avec l'axe z dirigé vers le haut, les composantes de \vec{g} sont :

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \text{avec } g = 9,806\ 65\ \text{m/s}^2 \quad (\text{ou valeur arrondie } 9,81\ \text{m/s}^2)$$

La force de gravitation agissant sur une particule de masse m vaut $m\vec{g}$. Le deuxième principe de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{g} = m\vec{a}$$

L'accélération étant constante, nous avons donc affaire à un mouvement uniformément accéléré (MUA, voir § 2.4.2).

$$\text{MUA, avec } \vec{a} = \vec{g} \qquad \vec{r}(t) = \frac{1}{2} \vec{g} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \quad [\text{m}] \quad (3.7)$$

Les constantes d'intégration sont \vec{r}_0 , la position initiale et \vec{v}_0 , la vitesse initiale.

$$\text{En composantes, on a explicitement : } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} t + x_0 \\ v_{0y} t + y_0 \\ -(1/2) g t^2 + v_{0z} t + z_0 \end{pmatrix}$$

La trajectoire est une parabole d'axe vertical.

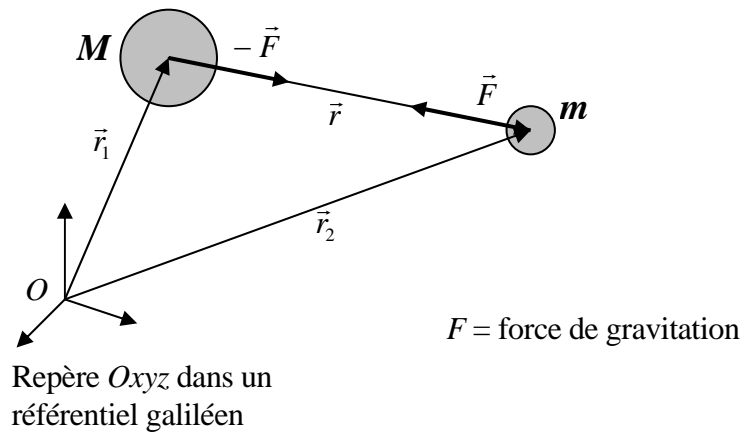
Calculons à quel l'instant la particule atteint le sommet de la trajectoire. Ce sommet est atteint lorsque $z(t)$ est maximum, c'est-à-dire lorsque que $v_z = \frac{dz}{dt} = 0$.

$$- g t_m + v_{0z} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_m = \frac{v_{0z}}{g}$$

La hauteur maximum atteinte vaut : $z_{\max} = z(t_m) = \frac{v_{0z}^2}{2g} + z_0$

3.3.3 Le problème à 2 corps

Le problème consiste à calculer le mouvement de deux corps de masses quelconques s'attirant l'un l'autre par la force de gravitation. Les conditions initiales, positions et vitesses des 2 corps, déterminent les formes des trajectoires. Le problème est assez ardu dans toute sa généralité ; nous nous limiterons ici au cas des orbites circulaires.



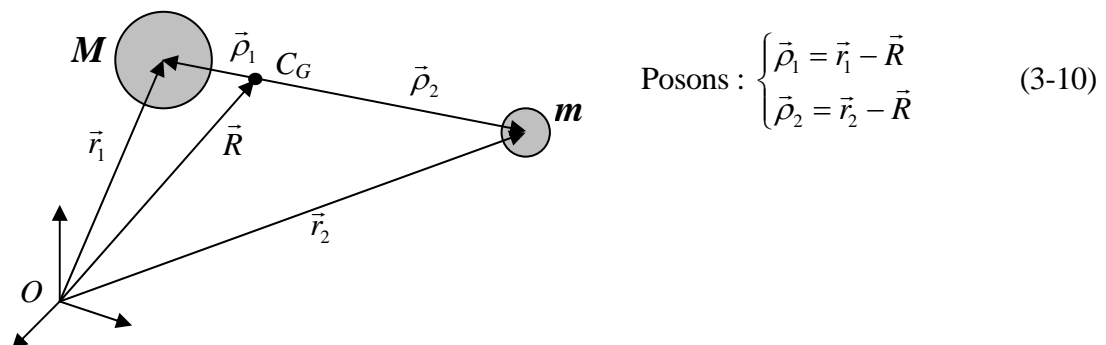
$$\begin{cases} M\ddot{\vec{r}}_1 = -\vec{F} = +G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \\ m\ddot{\vec{r}}_2 = +\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \end{cases} \quad \text{avec } \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (3.8)$$

$$\text{Vecteur position du centre de gravité } C_G : \vec{R} = \frac{M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M + m} \quad (3.9)$$

En additionnant les deux équations (3.8), on obtient : $M\ddot{\vec{r}}_1 + m\ddot{\vec{r}}_2 = 0$, soit $\ddot{\vec{R}} = 0$.

On en conclut que **le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme (MRU)**.

Etudions maintenant le mouvement des masses autour du centre de gravité C_G .



Les vecteurs $\vec{\rho}_1$ et $\vec{\rho}_2$ ont la même direction que \vec{r} (mais pas le même sens).

$$\begin{cases} \vec{\rho}_1 = \vec{r}_1 - \vec{R} = \vec{r}_1 - \frac{M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M+m} = \frac{M\vec{r}_1 + m\vec{r}_1 - M\vec{r}_1 - m\vec{r}_2}{M+m} = \frac{m\vec{r}_1 - m\vec{r}_2}{M+m} = -\frac{m\vec{r}}{M+m} \\ \vec{\rho}_2 = \vec{r}_2 - \vec{R} = \vec{r}_2 - \frac{M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M+m} = \frac{M\vec{r}_2 + m\vec{r}_2 - M\vec{r}_1 - m\vec{r}_2}{M+m} = \frac{M\vec{r}_2 - M\vec{r}_1}{M+m} = +\frac{M\vec{r}}{M+m} \end{cases} \quad (3.11)$$

Pour trouver l'équation différentielle à laquelle satisfait \vec{r} , reprenons les équations (3.8). Divisons la première par M et la seconde par m :

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = +G \frac{m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -G \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la seconde, on obtient :

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{M+m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.12)$$

C'est l'équation d'un **mouvement central**, l'accélération passant constamment par un point, le centre de gravité C_G .

Cette équation admet comme cas particulier le mouvement circulaire uniforme :

- Le module de \vec{r} est constant : $|\vec{r}| = a$. (ici, a = distance entre les masses²)
- La vitesse est constante : $|\dot{\vec{r}}| = v = \frac{2\pi a}{T}$ où T est la période
- L'accélération centripète vaut : $|\ddot{\vec{r}}| = a_n = \frac{v^2}{a}$

En introduisant ces expressions dans (3.12), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{a} &= G \frac{M+m}{a^2} \\ \frac{1}{a} \left(\frac{2\pi a}{T} \right)^2 &= G \frac{M+m}{a^2} \\ \boxed{\frac{a^3}{T^2} = G \frac{M+m}{4\pi^2}} & \quad (3.13) \end{aligned}$$

² Pour reprendre la même notation que la table CRM, p.192.

Tenant compte de (3.11), on conclut que les masses décrivent des cercles autour du centre de gravité.

- La masse M décrit un cercle de rayon $r_M = \frac{ma}{M+m}$
- La masse m décrit un cercle de rayon $r_m = \frac{Ma}{M+m}$

Dans le cas général, on peut montrer que les trajectoires sont des coniques : ellipses, hyperboles ou paraboles. Les cercles sont un cas particulier.

Note 1 :

Dans le cas des orbites elliptiques, a est le demi grand axe de l'ellipse. L'équation (3.13) est la 3^{ème} loi de Képler : les carrés des temps de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes³.

Note 2 :

Si initialement la vitesse relative des deux masses est suffisante, les trajectoires ne sont plus fermées, mais ont une forme hyperbolique (à la limite, parabolique).

3.3.4 Comment Newton a-t-il trouvé que la force de gravitation était en $1/r^2$?

Il est parti des 3 lois de Képler, déduites de l'observation du mouvement des planètes autour du Soleil.

1. Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers.
2. Les lignes joignant le Soleil aux planètes balaient des aires égales pendant des temps égaux.
3. Les carrés des temps de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes.

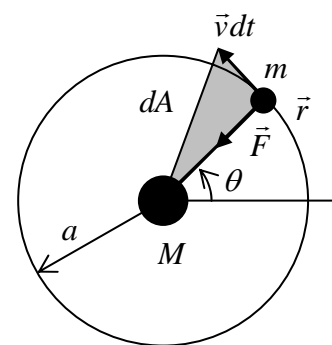
Pour simplifier, prenons le cas d'une trajectoire circulaire de rayon a . Montrons que la 2^{ème} loi implique dans ce cas que la vitesse angulaire est constante.

Aire balayée par la ligne qui joint les centres pendant un temps dt : $dA = \frac{1}{2} a(vdt)$

$$\text{Constante} = \frac{dA}{dt} = \frac{av}{2} = \frac{a(\omega a)}{2}$$

Comme le rayon a est fixe par hypothèse, alors la vitesse angulaire ω est aussi constante.

Désignons par $T = \frac{2\pi}{\omega}$ la période de révolution.



³ Voir tables CRM, pp 192-193.

Alors $\frac{dA}{dt}$ est égale à la surface du cercle divisée par la période : $\frac{dA}{dt} = \frac{\pi a^2}{T}$

La 3^{ème} loi implique $T^2 = ka^3$ avec $k = \text{constante}$.

Vu la symétrie du problème, la direction de la force doit passer par les centres des masses.

Donc on peut poser $\vec{F} = -f(r)\frac{\vec{r}}{r}$

Par le deuxième principe, cette force est égale à $m\vec{a}$. Comme le mouvement est circulaire uniforme ($r = a$), l'accélération est centripète, de module égal à $\omega^2 r$. On a donc :

$$f(r) = m\omega^2 r$$

En substituant ω par sa valeur tirée des relations précédentes, il vient :

$$f(r) = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = m\frac{4\pi^2}{kr^3} r = m\frac{4\pi^2}{kr^2}$$

La dépendance de la force est bien en $1/r^2$.

Le terme $\frac{4\pi^2}{k}$ s'identifie avec le produit GM de la loi de la gravitation (3.4).

3.4 TRAVAIL, ÉNERGIE, PUISSANCE

3.4.1 Travail

En mécanique, lorsqu'une force déplace son point d'application, on dit qu'elle effectue un certain travail. Prenons l'exemple d'un déménageur qui doit monter une caisse du premier au sixième étage d'une maison; on dit qu'il effectue un travail. En revanche, si la caisse est trop lourde pour être déplacée, on admettra qu'il n'a effectué aucun travail.

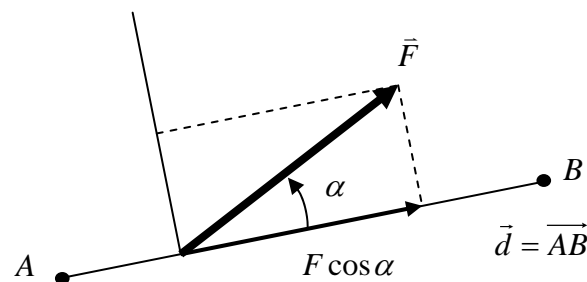
Lorsque le point d'application se déplace dans la *même direction et le même sens* que la force, le travail est défini simplement par

$$W = Fd$$

où F est l'amplitude de la force et d le déplacement du point d'application.

Nous utilisons la lettre W (*Work*) pour le travail. Nous réservons T pour la température.

Voyons maintenant le cas général où le déplacement et la force ont des directions différentes.



Seule la composante de la force parallèle au déplacement fournit un travail. La composante perpendiculaire ne travaille pas. En introduisant l'angle α entre la force et le déplacement, le travail est égal à $Fd \cos \alpha$. Ce produit de deux vecteurs est appelé en mathématique **produit scalaire** et est noté $\vec{F} \cdot \vec{d}$. D'où la définition générale du travail :

Déf. On appelle travail effectué par une force \vec{F} dont le point d'application subit un déplacement \vec{d} le produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{d}$.

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{d}} \quad (3.14)$$

Si est la force est perpendiculaire au déplacement, le produit scalaire est nul ($\cos \frac{\pi}{2} = 0$).

3.4.1.1 Rappel de quelques propriétés du produit scalaire

Le produit scalaire est **commutatif**, c'est-à-dire que $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Le produit scalaire est **distributif** par rapport à

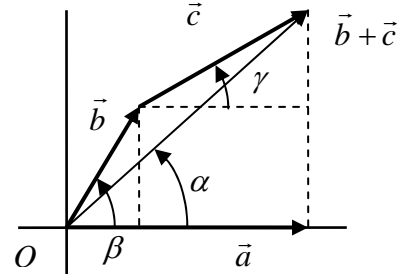
l'addition, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Dém. Sur le dessin ci contre, en projetant les vecteurs \vec{b} et \vec{c} sur \vec{a} , on a :

$$|\vec{b} + \vec{c}| \cos \alpha = b \cos \beta + c \cos \gamma$$

Multiplier par a :

$$a|\vec{b} + \vec{c}| \cos \alpha = ab \cos \beta + ac \cos \gamma = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$



Expression du produit scalaire en fonction des composantes des vecteurs.

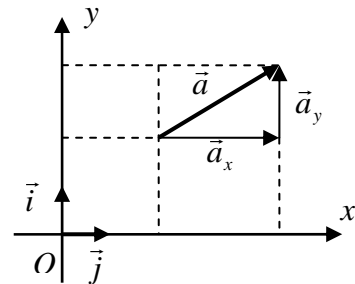
Prenons un système d'axes cartésiens et projetons les vecteurs \vec{a} et \vec{b} sur ces axes.

Soient \vec{i} et \vec{j} les vecteurs unités sur ces axes.

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} \end{cases}$$

Les vecteurs unités \vec{i} et \vec{j} étant perpendiculaires :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \quad \text{et} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$$



Calculons le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$ en utilisant ses propriétés de commutativité et de distributivité.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} = a_x b_x + a_y b_y$$

Donc finalement :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

Dans l'espace à trois dimensions, un calcul similaire donnerait :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Calcul de l'angle entre deux vecteurs \vec{a} et \vec{b}

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

3.4.2 Énergie

Dans la vie courante, lorsqu'on effectue un certain travail, on dit qu'on dépense de l'énergie. En mécanique on précise ceci de la façon suivante :

Déf. On appelle énergie d'un système mécanique la quantité de travail que ce système est susceptible de produire.

C'est une quantité scalaire qu'on mesure avec la même unité que le travail.

Dans le système SI, l'unité de travail et d'énergie a reçu le nom de joule, J en abrégé.

$$\begin{aligned} \text{Unité d'énergie} &= \text{unité de travail} = (\text{unité de force}) \cdot (\text{unité de déplacement}) = \\ &= \text{N} \cdot \text{m} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \text{m} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = \text{J} \end{aligned}$$

Note : Dans la pratique, on s'abstient d'écrire Nm, pour éviter toute confusion avec l'unité de couple (§3.5). On n'écrit pas non plus mN, qui signifie millinewton.

Autre unité : $1 \text{ kp} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg}^* \text{ m}$ (kilogrammètre) = 9,806 65 J

L'énergie peut prendre de nombreuses formes.

- Une masse placée à une certaine hauteur subit une force d'attraction terrestre égale à son poids. En faisant descendre cette masse, son poids produira un certain travail. On exprime ce fait en disant que cette masse possède une **énergie potentielle de gravitation**.
- Un litre d'essence possède une **énergie potentielle chimique**, car il pourra faire tourner un moteur et ainsi produire du travail.
- Un ressort, un fois comprimé ou tendu, possède une certaine énergie de **déformation élastique**.
- Un corps en mouvement possède une **énergie cinétique**, que l'on peut en principe récupérer en le freinant.

Ainsi on peut admettre que l'énergie d'un système résulte d'un travail. L'énergie potentielle de gravitation d'un objet résulte du travail qu'il faut fournir pour élever cet objet ; l'énergie cinétique du travail qu'il faut fournir pour le mettre en mouvement ; l'énergie de déformation élastique du travail des forces nécessaires à le déformer.

Quelques valeurs :

Essence : 47,3 MJ/kg densité 0,75 soit : 35,5 MJ/ℓ

Energie de **fission** de 1 kg d'uranium naturel :

uranium 235 : $6 \cdot 10^{11}$ J (abondance : 0,7%)

uranium 238 : $8 \cdot 10^{13}$ J (abondance : 99,3%)

Explosif : 1000 tonnes de TNT : $3,6 \cdot 10^{12}$ J

Electricité : 1 kWh (kilowattheure) = $3,6 \cdot 10^6$ J

3.4.2.1 Énergie cinétique

Déf. On appelle énergie cinétique d'un corps en mouvement le travail nécessaire à faire passer ce corps de l'état de repos à l'état de mouvement.

Calculons l'énergie cinétique d'une particule de masse m et animée d'une vitesse v .

Pour cela, supposons que la particule a été amenée à cette vitesse par l'application d'une force F constante. Le deuxième principe de la dynamique nous dit qu'elle a subi une accélération constante a valant F/m . Nous sommes donc en présence d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA, voir § 2.4.3). Nous avons vu que la vitesse et la position sont données par :

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{cases}$$

Avec les conditions initiales $s_0 = 0$ et $v_0 = 0$ (état de repos), ces équations s'écrivent :

$$\begin{cases} v = at \\ s = \frac{1}{2} at^2 \end{cases}$$

Exprimons le temps t au moyen de la première équation et remplaçons-le dans la seconde :

$$s = \frac{1}{2} a \left(\frac{v}{a} \right)^2 = \frac{v^2}{2a}$$

Enfin, remplaçons a par sa valeur F/m :

$$s = \frac{mv^2}{2F}$$

En multipliant chaque membre par la force F , supposée non nulle, on reconnaît l'expression Fs qui est précisément le travail fourni par la force sur la distance s . Par définition ce travail est égal à l'énergie cinétique.

Energie cinétique d'une
particule animée d'une
vitesse v

$$E_{cin} = \frac{mv^2}{2}$$

(3.15)

3.4.2.2 Énergie potentielle de gravitation (près de la surface de la Terre)

Déf. L'énergie potentielle de gravitation d'un objet est égale au travail fourni pour vaincre la force de gravitation lors du changement de hauteur.

Calculons⁴ l'énergie potentielle d'une particule de masse m placée à une hauteur h .

La force de gravitation, dirigée vers le bas, est égale au poids de la particule, soit à mg .

La force \vec{F} qu'il faut exercer pour monter la particule est dirigée vers le haut ; en module, elle est égale à la force de pesanteur mg .

Le déplacement h est vertical, donc parallèle à la force.

Le travail effectué vaut donc mgh , égal par définition à l'énergie potentielle.

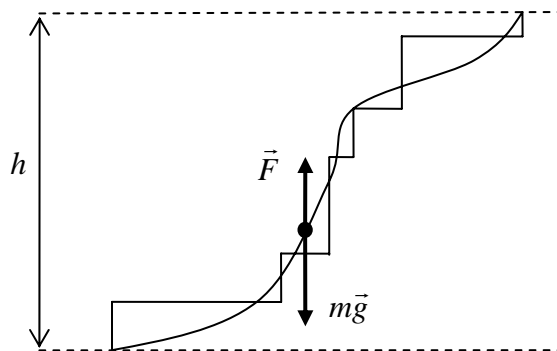
Energie potentielle

$$E_{pot} = mgh$$

(3.16)

Et si le déplacement ne se faisait pas selon la verticale, mais selon une trajectoire plus compliquée, obtiendrons-nous aussi mgh ? La réponse est oui, comme on peut s'en convaincre par le raisonnement ci-dessous.

Décomposons par la pensée la trajectoire en segments verticaux et horizontaux comme sur la figure ci-dessous:



La force travaille uniquement sur les déplacements verticaux. Pour chaque petit déplacement Δh , le travail vaudra $mg\Delta h$. En sommant sur tous les petits déplacements, on obtiendra en fin de compte mgh . Plus les segments seront petits, meilleure sera l'approximation de la trajectoire.

En conclusion, l'énergie potentielle de gravitation ne dépend pas de la *forme* de la trajectoire, mais uniquement de la *différence de hauteur*.

Note : Evidemment, ce n'est plus le cas en présence de forces de frottement.

⁴ Dans ce paragraphe, on suppose que h est petit par rapport au rayon de la Terre.

3.4.2.3 Principe de conservation de l'énergie

L'expérience montre que l'énergie peut passer d'une forme dans une autre. Par exemple l'énergie chimique de l'essence se transforme en énergie thermique par combustion et en énergie mécanique en agissant dans un moteur. Une balle de ping-pong rebondit puis s'immobilise à une certaine hauteur ; son énergie cinétique se transforme en énergie potentielle ; lorsqu'elle retombe son énergie potentielle se transforme en énergie cinétique. Si elle rebondit chaque fois moins haut, c'est qu'il y a transformation d'une partie de l'énergie en d'autres formes telles que chaleur (à cause des frottements) ou ondes sonores (bruit). On déduit un fait fondamental :

Principe de la conservation de l'énergie

Dans un système physique fermé, la somme des énergies reste constante.

On entend par système fermé un système qui n'échange ni matière, ni énergie avec son environnement. Dans un système fermé, on ne peut donc pas détruire de l'énergie ; on peut seulement la transformer d'une forme dans une autre.

Application à une particule de masse m tombant d'une hauteur h .

Dans ce cas, seules les énergies potentielle et cinétique interviennent.

$$\text{À l'altitude } z = h : \quad E = E_{cin1} + E_{pot1} = 0 + mgh$$

$$\text{À l'altitude } z = 0 : \quad E = E_{cin2} + E_{pot2} = \frac{mv^2}{2} + 0$$

On en déduit qu'elle touche le sol avec une vitesse $v = \sqrt{2gh}$.

En général, il est difficile de calculer l'énergie totale d'un système car il faudrait considérer toutes formes d'énergie possibles : mécanique, chimique, électrique, nucléaire, etc... En revanche, il est relativement facile de calculer des variations de l'énergie totale entre deux états du système, car on se restreint à celles qui interviennent vraiment dans le problème considéré.

3.4.2.4 Force conservative

Déf. La force est conservative lorsque le travail pour déplacer une particule d'un point à un autre ne dépend que de leurs positions et non du chemin parcouru.

Dans ce cas il est légitime de définir une fonction **potentiel** dont dérive la force. Dans le cas de la force de gravitation, cette fonction est mgz , avec l'axe z dirigé vers le haut.

Soit $V(z) = mgz$ la composante de la force selon z vaut $F_z = -\frac{dV}{dz} = -mg$

Le potentiel est défini à une constante additive près, que l'on fixe en pratique en choisissant selon l'application l'origine de l'axe z (par exemple le niveau de la mer).

Comme exemple de forces non conservatives, on peut citer les forces de frottement.

3.4.2.5 Énergie potentielle de gravitation (cas général)

Dans le cas général d'une masse m située à une distance r d'une masse M , il faut repartir du principe de la gravitation universelle.

Sous forme scalaire :

$$F(r) = G \frac{Mm}{r^2}$$

Si la masse est située initialement à une distance r de la masse M , il faut fournir un travail infinitésimal $F(r)dr$ pour l'amener à la distance $r + dr$.

Pour aller de r_1 à r_2 , il faut fournir le travail :

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr = \int_{r_1}^{r_2} G \frac{Mm}{r^2} dr = -G \frac{Mm}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \equiv V(r_2) - V(r_1)$$

Le potentiel dont dérive la force de gravitation s'écrit donc :

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} + Cste$$

Si l'on fixe le zéro du potentiel à l'infini, on a simplement :

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$

Le potentiel d'un champ de gravitation varie donc en $-1/r$. On dit que le champ de gravitation est conservatif, puisque le travail à fournir pour déplacer une masse de r_1 à r_2 ne dépend que de r_1 et r_2 et non de la forme du chemin pour aller de r_1 à r_2 .

Soit v_1 et v_2 les vitesses de la masse m en 1 et 2 respectivement. La conservation de l'énergie nous permet d'écrire que :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$$

La quantité $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$ est appelée **constante du mouvement**. Sur une trajectoire, elle donne à chaque instant une relation entre la vitesse relative et la distance entre les deux masses.

Le signe de la constante du mouvement permet de classer les trajectoires :

- < 0 la masse m ne peut jamais aller à l'infini, la trajectoire est fermée : ellipse, cercle ;
- = 0 parabole ;
- > 0 hyperbole, la masse m ne revient jamais.

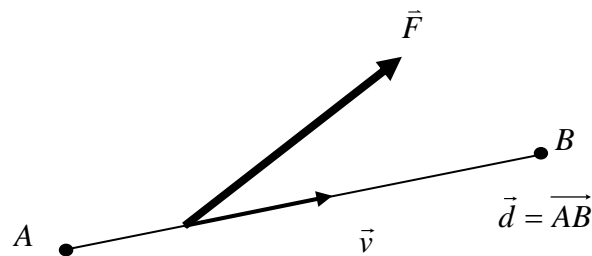
3.4.3 Puissance

Déf. On appelle puissance le travail effectué par unité de temps.

Dans le système SI, l'unité de puissance est le watt, W en abrégé.

$$1 \text{ watt} = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ seconde}} \quad W = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^3}$$

3.4.3.1 Puissance d'une force déplaçant son point d'application



La force déplace son point d'application de A à B, pendant un intervalle de temps Δt .

Définition de la vitesse : $\vec{v} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$

Définition du travail : $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$

Définition de la puissance : $P = \frac{W}{\Delta t}$

On en déduit :

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}} \quad [W] \quad (3.17)$$

Puissance = (force)·(vitesse)

3.5 MOMENT, COUPLE

Considérons d'abord un exemple.

La figure ci-contre schématise un treuil servant de monte-charge.

Lorsque le tambour du treuil fait un tour, le travail effectué est égal à $Fd = 2\pi rF$, où F , en module, est égale au poids de la charge.

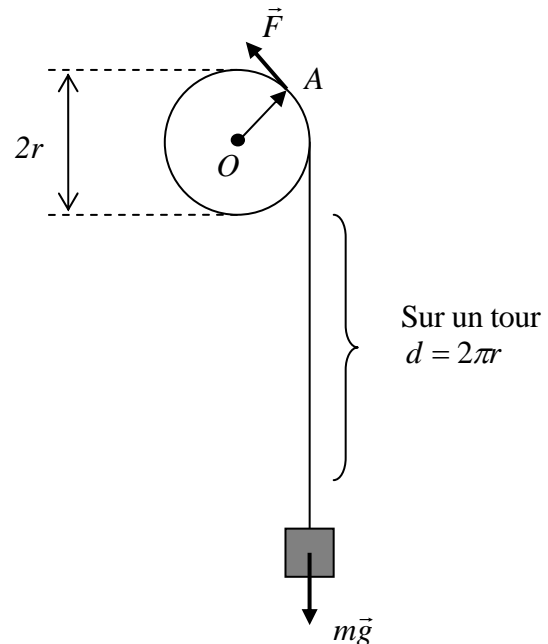
$C = rF$ est le *couple* que doit fournir le moteur pour faire monter la charge.

Si le tambour effectue n tours par seconde, la puissance nécessaire vaut

$$P = 2\pi nrF .$$

Introduisant la vitesse angulaire ω , égale à $2\pi n$, on a finalement $P = C\omega$.

Puissance = (couple)·(vitesse angulaire)



Dans l'exemple ci-dessus, on voit que le couple apparaît sous forme du produit rF . Equipé du même moteur, un treuil avec un tambour de rayon deux fois plus petit pourra soulever une charge deux fois plus grande. Pour le même travail fourni, la force est inversement proportionnelle au rayon, d'où l'intérêt du treuil.

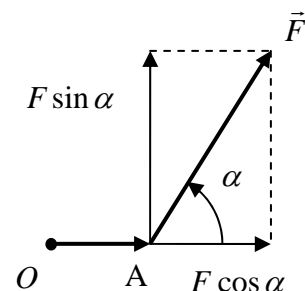
On peut aussi calculer le travail comme étant celui d'une force tournante qui déplace son point d'application A. Le module de cette force est égal à F . Comme à chaque instant cette force est parallèle au déplacement, on retrouve l'expression $Fd = 2\pi rF$ pour le travail fourni sur 1 tour.

Voyons maintenant le cas plus général où la force fait un angle α avec le bras de levier OA.

Lorsque A tourne autour de O seule la composante tangentielle de la force travaille.

Cette composante est égale à $F \sin \alpha$.

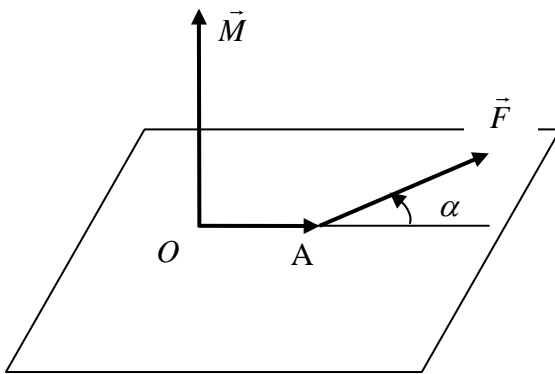
La force \vec{F} tend à faire tourner le bras de levier OA autour d'un axe perpendiculaire à \vec{OA} et \vec{F} .



3.5.1 Moment d'une force

On peut donc construire un vecteur \vec{M} , appelé **moment**, perpendiculaire à la force \vec{F} et au bras de levier \vec{OA} et de module $|\vec{M}| = |\vec{OA}||\vec{F}|\sin\alpha$. Cette opération mathématique a reçu le nom de produit vectoriel. Elle est notée $\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F}$. (On dit OA *cross* F.) D'où la définition :

Déf. On appelle **moment d'une force \vec{F} appliquée en A par rapport à un point O le produit vectoriel $\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F}$.**



Orientation :

$\vec{OA}, \vec{F}, \vec{M}$ forment un trièdre direct, c'est-à-dire orienté comme les 3 doigts de la main droite :

\vec{OA} = pouce

\vec{F} = index

\vec{M} = majeur.

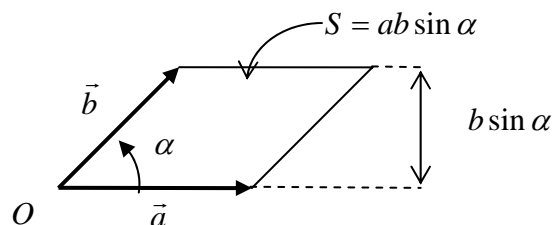
$$|\vec{M}| = |\vec{OA}||\vec{F}|\sin\alpha$$

L'unité de moment dans le système SI est le newton-mètre, en abrégé Nm

$$\text{Exprimé en unités fondamentales : } \text{N}\cdot\text{m} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \text{m} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

(Voir remarque § 3.4.2 ; ne pas exprimer le couple en joules !)

Le module du produit vectoriel de deux vecteurs est égal à la surface du parallélogramme délimité par ces vecteurs.



3.5.1.1 Rappel de quelques propriétés du produit vectoriel

Le produit vectoriel **n'est pas commutatif**.

Il est anticommutatif, c'est-à-dire que $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

En effet, si l'on permute \vec{a} et \vec{b} , il faut changer le sens de $\vec{a} \times \vec{b}$ si l'on veut avoir un trièdre direct.

Le produit vectoriel est **distributif** par rapport à l'addition, $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Expression du produit vectoriel en fonction des composantes des vecteurs.

Prenons un système d'axes cartésiens à 3 dimensions et projetons les vecteurs \vec{a} et \vec{b} sur ces axes. Soient \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} les vecteurs unités sur ces axes.

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{cases}$$

Les vecteurs unités \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} étant deux à deux perpendiculaires, on a les relations :

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \\ \vec{i} \times \vec{j} &= -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} &= -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j} \end{aligned}$$

Calculons le produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ en utilisant ses propriétés d'anticommutativité et de distributivité. (Il faut faire attention à respecter l'ordre des termes.)

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned}$$

Composantes du vecteur $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

$\begin{aligned} c_x &= a_y b_z - a_z b_y \\ c_y &= a_z b_x - a_x b_z \\ c_z &= a_x b_y - a_y b_x \end{aligned}$
--

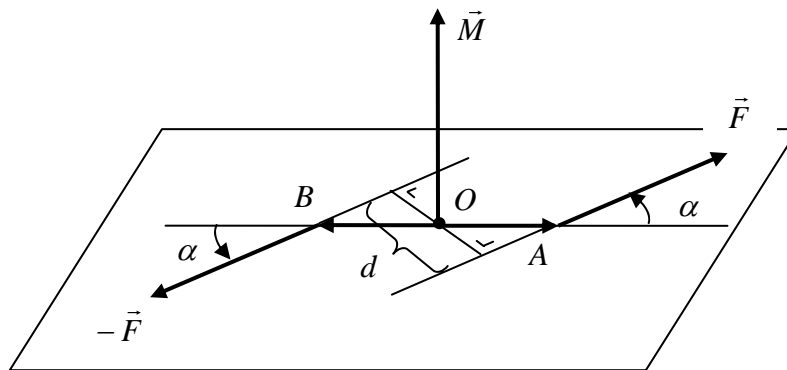
On peut également mettre le produit vectoriel sous forme d'un déterminant.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a_x & b_x \\ \vec{j} & a_y & b_y \\ \vec{k} & a_z & b_z \end{vmatrix}$$

3.5.2 Couple

Déf. On appelle couple un système de deux forces parallèles, de même amplitude, mais de sens opposés, ayant des points d'application différents.

Déf. On appelle moment d'un couple, le vecteur obtenu en additionnant les moments des forces de ce couple.



Calcul du moment du couple :

$$\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F} + \vec{OB} \times (-\vec{F}) = (\vec{OA} + \vec{BO}) \times \vec{F} = \vec{BA} \times \vec{F}$$

$$|\vec{M}| = |\vec{BA}| |\vec{F}| \sin \alpha = |\vec{F}| |\vec{BA}| \sin \alpha = |\vec{F}| d$$

$$M = Fd$$

Calculons maintenant le travail effectué par un couple de forces tournant d'un angle θ . Chacune des deux forces déplace son point d'application de $\theta \frac{d}{2}$. Le travail est donc égal à $F\theta d$.

Travail d'un couple (moment)
tournant d'un angle θ [rad]

$$W = M\theta$$

[J]

(3.18)

Puissance d'un couple (moment)
tournant à une vitesse angulaire de
 ω [rad/s]

$$P = M\omega$$

[W]

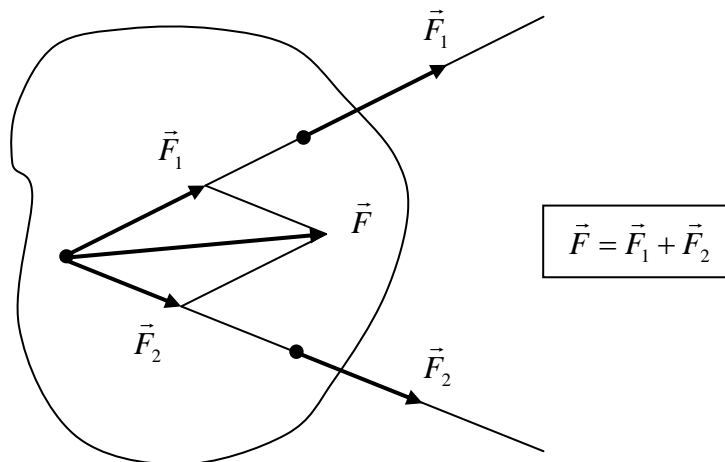
(3.19)

3.5.3 Composition des forces

Etudions maintenant l'effet de plusieurs forces⁵ sur un solide indéformable. L'expérience suggère la proposition suivante :

Proposition : On ne change pas l'effet d'une force sur un solide en équilibre en la faisant glisser le long de sa direction.

Cas d'un solide soumis à deux forces concourantes, c'est-à-dire de directions différentes (non parallèles).



La **résultante de deux forces concourantes** est la somme vectorielle de ces deux forces. Elle a pour point d'application le point de concours de ces deux forces.

Résultante de n forces concourantes

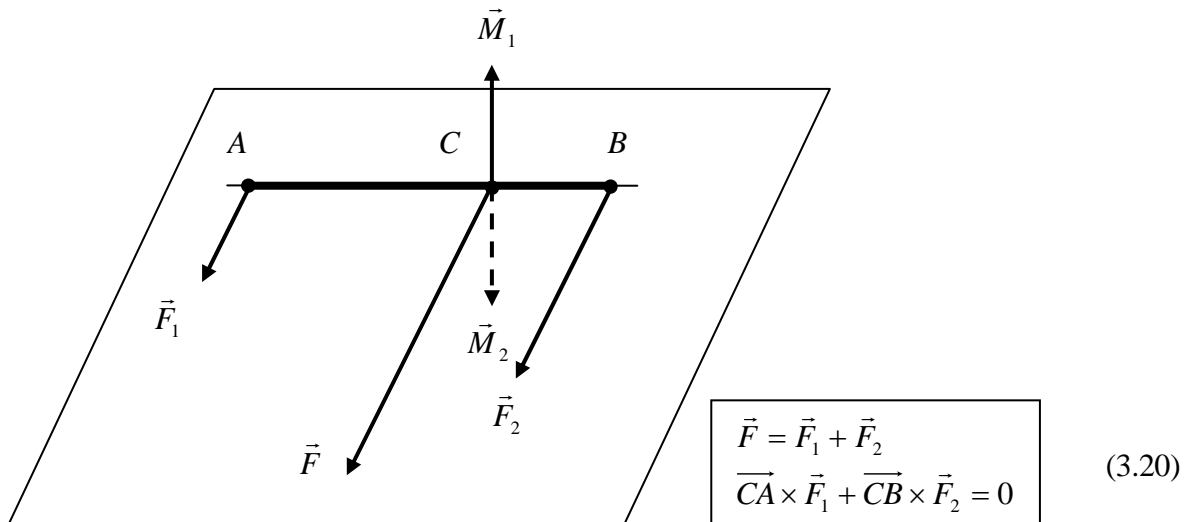
On obtiendra la résultante de n forces concourantes en cherchant la résultante des deux premières forces, puis la résultante de celle-ci avec la troisième et ainsi de suite jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ force.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

⁵ Nous ne considérons dans ce chapitre que des forces coplanaires.

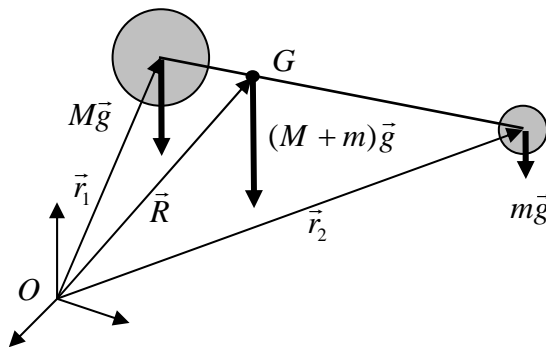
Résultante de deux forces parallèles

La résultante de deux forces parallèles ayant des points d'application A et B est égale à la somme vectorielle des deux forces. Son point d'application est un point C situé sur la droite AB de telle sorte que la somme des moments des deux forces par rapport à C soit nulle.



Dans le cas de deux forces de direction parallèles et de sens opposés, le point C n'existe pas, mais il subsiste un couple qui tend à faire tourner le solide.

Centre de gravité de deux masses pesantes



La somme des moments par rapport à G est nulle, donc : $(\vec{r}_1 - \vec{R}) \times M\vec{g} + (\vec{r}_2 - \vec{R}) \times m\vec{g} = 0$

$$(M\vec{r}_1 - M\vec{R}) \times \vec{g} + (m\vec{r}_2 - m\vec{R}) \times \vec{g} = 0$$

$$(M\vec{r}_1 - M\vec{R}) + (m\vec{r}_2 - m\vec{R}) = 0$$

$$(M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2) = (M + m)\vec{R}$$

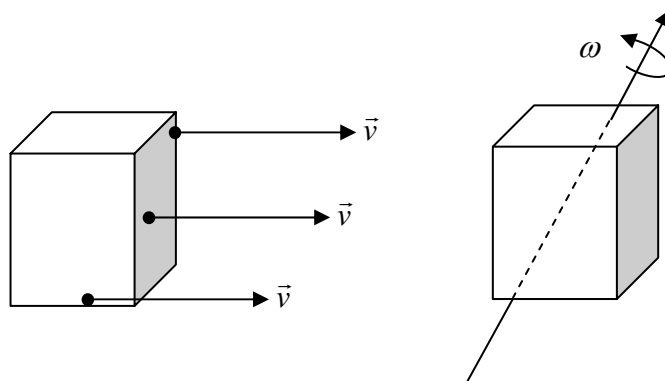
$$\vec{R} = \frac{M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M + m}$$

3.5.4 Mouvement du solide

Un solide en mouvement peut prendre deux espèces de mouvements différents : une translation ou une rotation. Un mouvement quelconque est toujours une combinaison de ces deux espèces de mouvements.

Déf. On appelle translation un mouvement dans lequel tous les points de solide ont la même vitesse.

Déf. On appelle rotation un mouvement dont un point ou une droite du solide est fixe. On parle de rotation autour d'un point ou de rotation autour d'un axe.



Le mouvement du solide est à 6 degrés de liberté :

- 3 pour la translation (les 3 composantes du vecteur \vec{v})
- 3 pour la rotation (deux pour la direction de l'axe et un pour la vitesse angulaire).

Initialement au repos...

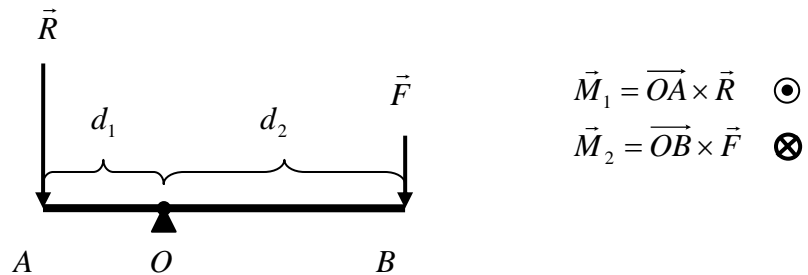
- ... un solide soumis à une force résultante non nulle et à un couple nul subit un mouvement de translation ;
- ... un solide soumis à une force résultante nulle et à un couple non nul subit un mouvement de rotation ;
- ...un solide soumis à une force résultante non nulle et à un couple non nul subit un mouvement de translation et de rotation.

3.5.5 Condition d'équilibre d'un solide

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système mécanique soit en **équilibre** est que la résultante de forces s'exerçant sur lui soit nulle et que la somme des moments de forces par rapport à l'un de ses points soit nulle.

Par définition, on dit qu'un système est en équilibre s'il est au **repos** ou s'il est en mouvement de translation uniforme.

Application : Le levier



Quelle force \vec{F} faut-il appliquer à l'extrémité du levier pour équilibrer \vec{R} ?

La condition somme des moments = 0 donne la condition d'équilibre.

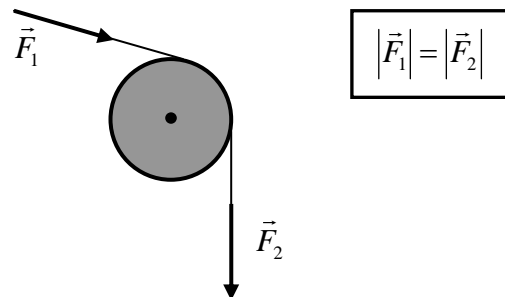
$$\vec{OA} \times \vec{R} + \vec{OB} \times \vec{F} = 0$$

Les moments sont perpendiculaires au plan des forces. Leurs projections sur un axe perpendiculaire au plan des forces donnent la relation :

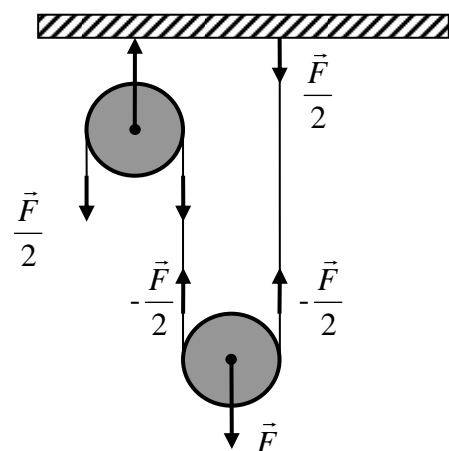
$$d_1 R - d_2 F = 0 \qquad \text{D'où : } F = \frac{d_1}{d_2} R$$

Application : La poulie

La poulie permet de changer la direction d'une force

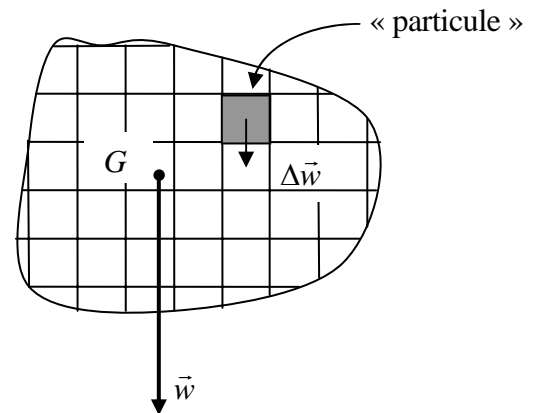


Le système ci-contre permet d'équilibrer une force F par une force moitié.



3.5.6 Centre de gravité

Un solide de dimensions finies peut être considéré comme un assemblage de particules, chacune étant soumise à une force de gravitation $\Delta\vec{w}$. Le poids \vec{w} du solide est la résultante de toutes les forces élémentaires s'appliquant sur les diverses particules constituantes. Cette résultante s'applique en un point tel que la somme des moments de tous les $\Delta\vec{w}$ soit nulle.



Déf. On appelle centre de gravité d'un solide le point d'application de la résultante \vec{w} de toutes les forces de gravitation élémentaires $\Delta\vec{w}$ associées aux particules constituant ce solide.

Si le solide possède des axes et/ou des plans de symétrie, le centre de gravité est situé sur l'intersection de ces axes et/ou plans de symétrie.

Exemple : centre d'un disque, d'une sphère, d'un cube

Formule générale

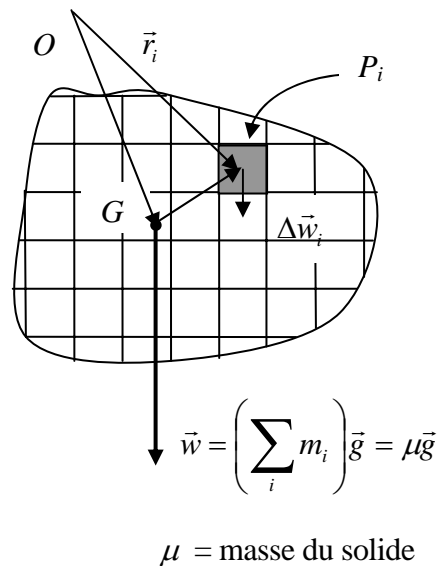
La particule i de masse m_i est repérée par le vecteur $\vec{OP}_i = \vec{r}_i$ son poids est égal à $\Delta\vec{w}_i = m_i\vec{g}$

Le centre de gravité est repéré par $\vec{OG} = \vec{R}$

Par définition G est tel que la somme des moments élémentaires soit nulle :

$$\sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (m_i \vec{g}) = 0$$

Ce qui implique : $\sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) = 0$



Position du centre de gravité
(ou centre de masse)

$$\vec{R} = \frac{\left(\sum_i (m_i \vec{r}_i) \right)}{\left(\sum_i m_i \right)} = \frac{\left(\sum_i (m_i \vec{r}_i) \right)}{\mu}$$

(3.21)

3.6 QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Déf. On appelle quantité de mouvement d'une particule le produit de sa masse par sa vitesse.

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad [\text{kg}\cdot\text{m/s}] \quad (3.22)$$

Exprimons maintenant le deuxième principe de la dynamique (éq. 3.2) au moyen de la quantité de mouvement. Pour une particule de masse m constante :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad (3.23)$$

Ainsi la force est la dérivée de la quantité de mouvement. C'est en fait sous cette forme que Newton a énoncé son deuxième principe.

3.6.1 Conservation de la quantité de mouvement

Si une particule n'est soumise à aucune force, sa quantité de mouvement est conservée. En effet, en l'absence de force, le deuxième principe montre que $\vec{p} = \text{constante}$.

Voyons maintenant ce qu'il en est d'un système constitué d'un ensemble de particules. La quantité de mouvement totale est simplement la somme des quantités de mouvement des particules.

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (3.24)$$

Dans le cas général, chaque particule est soumise à deux types de forces :

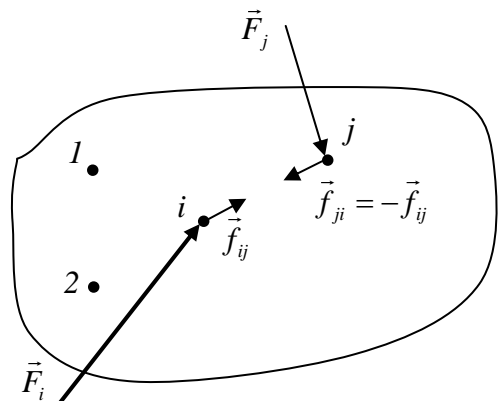
- les forces extérieures, qui proviennent d'un autre système, placé à l'extérieur ;
- les forces intérieures, c'est-à-dire les forces entre les particules elles-mêmes.

Forces extérieures : $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_j, \dots$

Forces intérieures : $\vec{f}_{12}, \dots, \vec{f}_{ij}, \dots, \vec{f}_{ji}, \dots$

Pour chaque particule :

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij}$$



Lorsqu'on fait la somme $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$, il ne subsiste que la résultante des forces extérieures \vec{F}_{ext} . Les forces intérieures s'annulent deux à deux en vertu du principe de l'action et de la réaction. On obtient finalement.

$$\boxed{\vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt}} \quad (3.25)$$

Cette équation montre que lorsque la résultante des forces extérieures est nulle, la quantité de mouvement totale est conservée. C'est le principe de la conservation de la quantité de mouvement pour un système quelconque.

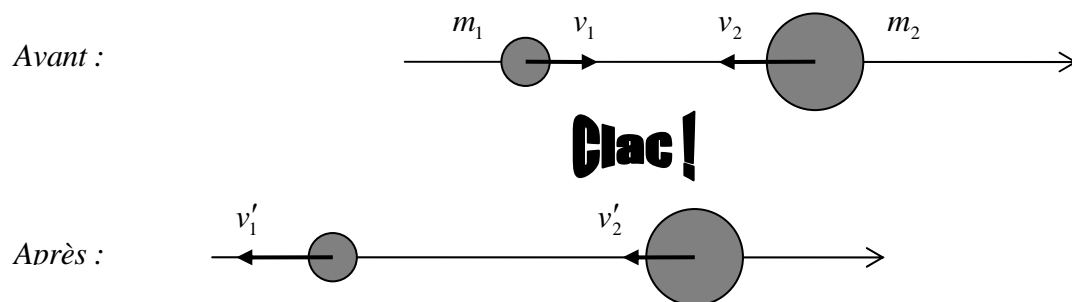
La quantité de mouvement totale d'un système isolé est constante.

C'est une loi fondamentale de la physique qui n'a jamais été mise en défaut. Avec la loi de conservation de la masse et celle de la conservation de l'énergie, elle permet de résoudre de nombreux problèmes classiques de dynamique, par exemple les problèmes de collisions.

3.6.2 Les collisions

Nous traitons ici le cas à une dimension.

Soit 2 billes de masse m_1 et m_2 , de vitesses initiales v_1 et v_2 .



Conservation de la quantité de mouvement : $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

Conservation de l'énergie cinétique : $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

Nous supposons que la collision est **élastique**, autrement dit que toute l'énergie cinétique présente avant la collision se retrouve après. Il n'y a pas de déformation.

Nous avons donc deux équations, qui nous permettent de calculer les deux inconnues v_1' et v_2' .

Tous calculs faits : $v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ $v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$

3.6.3 Impulsion

Considérons l'exemple suivant : on frappe une balle de tennis avec une raquette. Soit m la masse de la balle, \vec{v}_1 sa vitesse avant l'impact et \vec{v}_2 sa vitesse après l'impact. La variation de sa quantité de mouvement est donnée par :

$$\Delta\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \quad (3.26)$$

Cette variation de quantité de mouvement résulte de la force exercée sur la balle durant l'impact. En intégrant l'équation (3.23), $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ nous pouvons écrire :

$$\Delta\vec{p} = \int \vec{F}(t)dt \quad (3.27)$$

L'intégrale porte sur la durée de l'impact, pendant lequel la force est non nulle.

Déf. On appelle impulsion l'intégrale de la force appliquée

Le concept d'impulsion permet de traiter les cas où l'allure de la force au cours du temps n'est pas connue avec exactitude. Dans l'exemple ci-dessus de la balle de tennis, nous ne connaissons pas la force à chaque instant. En revanche, si nous connaissons la durée de l'impact, Δt , nous pouvons estimer la force moyenne.

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{\Delta t} \quad (3.28)$$

Exemples :

Balle	Masse [kg]	Vitesse acquise [m/s]	Temps d'impact [ms]	Impulsion [kg·m/s]	Force moyenne [N]
Tennis (service)	0,058	51	4	2,598	740
Football (coup-franc)	0,425	26	8	11,05	1380

(Dans la table ci-dessus, on suppose que la vitesse initiale de la balle est nulle.)

Collision frontale d'une voiture avec un mur en béton

L'analyse des crash-tests au moyen de caméras à prise de vue rapide montre que la durée de l'impact est de l'ordre de 100 ms. Estimons la force moyenne subie par un passager attaché par sa ceinture de sécurité :

Masse du passager : 80 kg

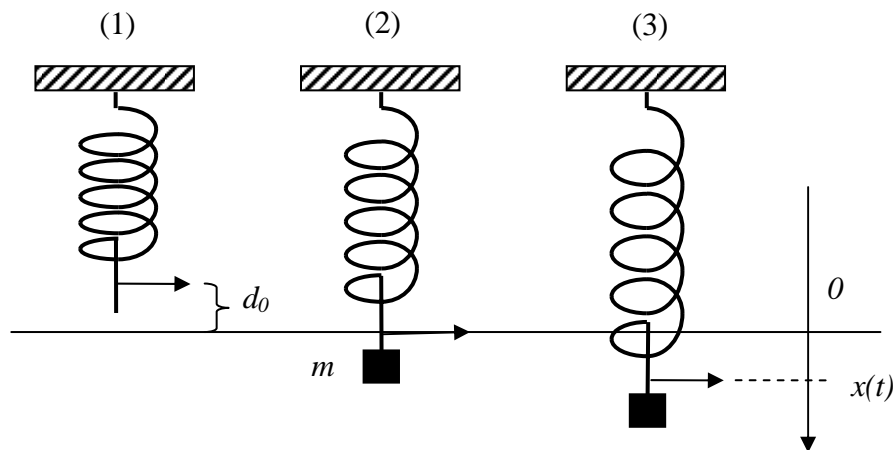
Vitesse de la voiture : 20 m/s (72 km/h)

$$\rightarrow \text{Force moyenne } F_m = \frac{80 \cdot 20}{0,1} = 16000 \text{ N } (= 1,6 \text{ tonne force !})$$

3.7 MOUVEMENT HARMONIQUE

Il s'agit d'un mouvement d'oscillation très fréquemment rencontré en physique. Ce mouvement est celui d'une particule ou d'un mobile soumis à une force de rappel proportionnelle à son déplacement autour d'une position de repos. Nous allons étudier deux exemples : celui d'une masse suspendue à un ressort et celui d'un pendule.

3.7.1 Masse suspendue à un ressort



- (1) Ressort à vide.
Sa caractéristique est $F = kd$, où :
 F est la force de rappel,
 k est la constante du ressort,
 d est l'allongement.
- (2) On suspend une masse m .
Le ressort s'allonge de $d_0 = mg/k$ selon la verticale. La force de rappel, dirigée vers le haut compense exactement le poids de la masse, dirigé vers le bas.
- (3) On donne une impulsion à la masse de telle sorte à la faire osciller selon x . A l'instant t la position de la masse est $x(t)$. En choisissant comme origine de l'axe x la position de repos de la masse, le second principe de la dynamique, somme des forces = masse·accélération, nous donne l'équation :

$$mg - k(d_0 + x) = ma$$

Comme $d_0 = mg/k$, il reste :

$$\boxed{-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}} \quad (3.29)$$

Ou bien :

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

Ainsi l'équation du mouvement oscillatoire est une fonction du temps dont la dérivée seconde est proportionnelle à la fonction elle-même, avec un signe moins qui provient du fait que la

force est une force de rappel. Du cours de mathématiques, nous savons que les fonctions sinus et cosinus ont cette propriété. Nous pouvons donc écrire la solution générale sous la forme

$$\boxed{x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t} \quad (3.30)$$

Où A , B et ω sont des constantes à déterminer. En dérivant deux fois (3.30), nous obtenons :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$$

En identifiant avec l'équation (3.29), nous obtenons la valeur de la **pulsation** ω .

Pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [s⁻¹] (3.31)

Nous avons donc affaire à un mouvement périodique. Nous définissons la **fréquence** et la **période** des oscillations comme suit :

Fréquence $f \equiv \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ [s⁻¹] (3.32)

Période $T \equiv \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ [s] (3.33)

Les constantes A et B se déterminent en fonction des conditions initiales. Par exemple, si au temps $t = 0$ la masse était en x_0 , animée d'une vitesse v_0 , alors $A = x_0$ et $B = v_0/\omega$. Dans ce cas l'équation du mouvement oscillatoire, appelé aussi mouvement harmonique s'écrit :

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (3.34)$$

Une alternative à l'expression (3.30) est la suivante

$$\boxed{x(t) = C \cos(\omega t + \varphi)} \quad (3.35)$$

où φ est la **phase** de l'oscillation et C est une constante. La relation avec les constantes A et B est la suivante :

$$A = C \cos \varphi ; B = -C \sin \varphi$$

3.7.2 Le pendule

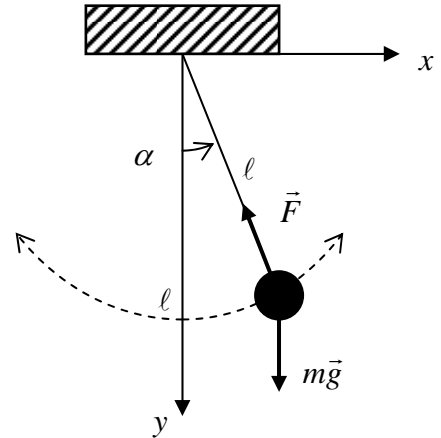
Un pendule est un dispositif constitué d'une masse suspendue à un fil est pouvant osciller librement dans un plan vertical. Soit ℓ la longueur du pendule, supposée constante. La masse est repérée par l'angle α .

Sa position est donnée par
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell \sin \alpha \\ \ell \cos \alpha \end{pmatrix}$$

La masse est soumise à deux forces, son poids $m\vec{g}$ et la tension du fil \vec{F} . La résultante de ces deux forces est une force de rappel qui maintient la masse autour de sa position de repos $\alpha = 0$.

Le deuxième principe de la dynamique s'écrit dans ce cas : $\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$.

Calculons la vitesse et l'accélération de la masse m à partir de sa position repérée par l'angle α .



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell \cos \alpha \\ -\ell \sin \alpha \end{pmatrix} \frac{d\alpha}{dt} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ell \sin \alpha \\ -\ell \cos \alpha \end{pmatrix} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \begin{pmatrix} \ell \cos \alpha \\ -\ell \sin \alpha \end{pmatrix} \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

En introduisant cette expression dans l'équation $\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$, il vient, en composantes :

$$\begin{pmatrix} -F \sin \alpha \\ -F \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -\ell \sin \alpha \\ -\ell \cos \alpha \end{pmatrix} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + m \begin{pmatrix} \ell \cos \alpha \\ -\ell \sin \alpha \end{pmatrix} \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Multiplions la composante selon x par $\cos \alpha$ et celle selon y par $\sin \alpha$ et soustrayons :

$$-mg \sin \alpha = m\ell \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

C'est une équation différentielle fait intervenir α et sa dérivée seconde de manière non linéaire. On peut obtenir une solution approchée en faisant **l'approximation des petits angles**, on remplace $\sin \alpha$ par α et on obtient une équation linéaire. Après simplification par m :

$$-g\alpha = \ell \frac{d^2\alpha}{dt^2} \quad (3.36)$$

Il s'agit d'une équation du même type que celle rencontrée précédemment (éq. 3.29). Sa résolution est en tout point identique. Dans ce cas la pulsation et la période valent :

$$\text{Pulsation} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad [\text{rad/s}] \quad (3.37)$$

$$\text{Période} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad [\text{s}] \quad (3.38)$$

3.7.3 Énergies cinétique et potentielle dans le cas du mouvement harmonique

Dans le cas de la masse suspendue à un ressort, partons de l'expression (3.34):

$$\text{Position : } x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$\text{Vitesse : } v(t) = -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t$$

$$\text{Énergie cinétique : } E_{cin}(t) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (x_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + v_0^2 \cos^2 \omega t - 2x_0 v_0 \omega \sin \omega t \cos \omega t)$$

Énergie potentielle : par définition, c'est le travail qu'il faut fournir pour amener la masse de la position 0 à la position x :

$$E_{pot}(t) = \int_0^x F(x') dx' = \int_0^x kx' dx' = \frac{1}{2} kx^2$$

$$\text{Énergie potentielle : } E_{pot}(t) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k \left(x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t + 2 \frac{x_0 v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t \right)$$

Tenant compte de (3.31), $k = m\omega^2$, il vient :

$$\text{Masse + ressort} \quad \boxed{E_{cin}(t) + E_{pot}(t) = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2} \quad (3.39)$$

L'énergie mécanique totale est constante et égale à l'énergie initiale.

Dans le cas du pendule, le calcul est analogue. En utilisant les notations du § 3.7.2 :

$$\text{Position : } x(t) = \ell \alpha(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

Dans ce cas, d'après (3.37), on a : $\omega = g / \ell$ au lieu de $\omega = k / m$.

Il suffit donc de remplacer k par mg / ℓ dans (3.39).

$$\text{Pendule} \quad \boxed{E_{cin}(t) + E_{pot}(t) = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \frac{mg}{\ell} x_0^2} \quad (3.40)$$

3.8 FORCES DE FROTTEMENT

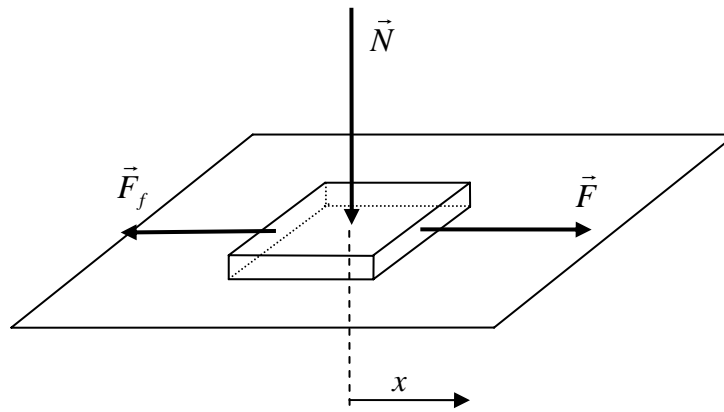
Les forces de frottement sont des forces qui s'opposent au mouvement relatif de deux objets en contact. Elles sont souvent considérées comme perturbatrices, voire nuisibles, mais si l'on y réfléchit bien, on se rend compte que la vie de tous les jours serait impossible sans les frottements. En effet, sans les forces de frottement, comment marcher sur le sol sans glisser et tomber ? Comment une voiture pourrait-elle prendre un virage sans l'adhérence des pneus à la route ?

On se doute bien que l'explication du frottement n'est pas simple, puisqu'elle doit en principe faire intervenir des forces au niveau moléculaire, dépendantes de la nature physico-chimique des objets. L'étude détaillée des causes des frottements est l'objet de la **tribologie**.

Dans la pratique, pour décrire les phénomènes dynamiques à l'échelle macroscopique, on tient compte des forces de frottements au moyen de coefficients empiriques déterminés expérimentalement. On distingue deux cas : le frottement statique, c'est-à-dire, sans glissement, et le frottement dynamique, avec glissement.

3.8.1 Frottement statique

Considérons une plaque posée sur une surface plane. Pressons cette plaque avec une force normale \vec{N} . (Cette force inclut le poids de la plaque.) Lorsque nous appliquons une force \vec{F} dans la direction horizontale, nous constatons que **la plaque reste immobile tant que la force est inférieure à un certain seuil**. De plus, les expériences montrent que ce seuil est proportionnel à la force normale. La constante de proportionnalité dépend de la nature des matériaux en contact et de leur état de surface.



Loi d'Amontons
(cas statique)

$$F_{f,s} \leq \mu_s N$$

(3.41)

Le coefficient μ_s est le coefficient de frottement statique, ou coefficient d'**adhérence**. (On trouve aussi μ_0 dans la littérature.) C'est un nombre sans dimension.

Exemple : Pneu sur route $\mu_s \approx 1$, bois sur bois : $\mu_s \approx 0,5$, métal sur métal : $\mu_s \approx 0,2$.

3.8.2 Frottement dynamique

En cas de glissement, il y a aussi, en première approximation, proportionnalité entre la force de frottement et la force normale.

Loi de Coulomb
(cas dynamique)

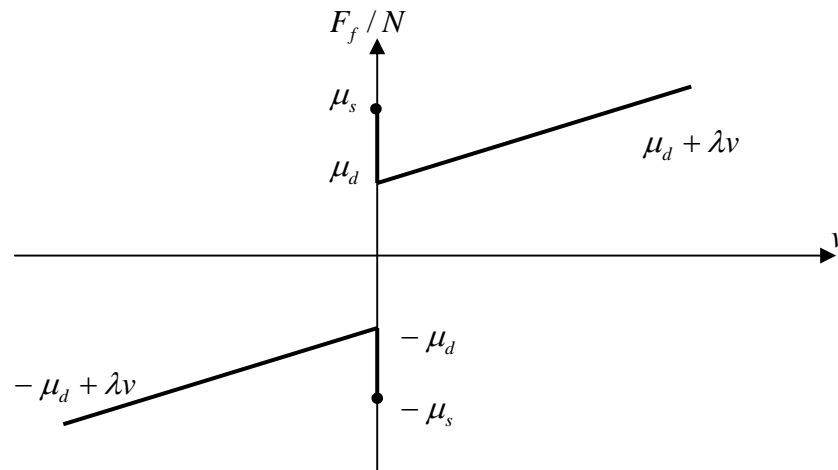
$$F_{f,d} = \mu_d N$$

(3.42)

Le coefficient μ_d est le coefficient de frottement dynamique, ou coefficient de **glissement**. (On trouve aussi μ dans la littérature.) La valeur de μ_d est en général inférieure à celle de μ_s .

Exemple : Pneu sur route $\mu_d \approx 0,6$, bois sur bois : $\mu_d \approx 0,4$, métal sur métal : $\mu_d \approx 0,2$.

Lorsque la vitesse augmente, le frottement peut, dans certains cas, dépendre de la vitesse (frottement visqueux).



Le fait que $\mu_d \leq \mu_s$ permet d'expliquer le mouvement saccadé que l'on observe parfois lorsqu'on fait glisser un objet sur un autre (en anglais stick-slip).

Mathématiquement, on peut exprimer la force de frottement par une seule formule :

$$F_f = N(\mu_d \operatorname{sgn}(v) + \lambda v) + \min(F, \mu_s N) \operatorname{sgn}(F) \delta(v)$$

avec :

$$\operatorname{sgn}(v) = 1 \quad \text{si } v > 0$$

$$\operatorname{sgn}(v) = 0 \quad \text{si } v = 0$$

$$\operatorname{sgn}(v) = -1 \quad \text{si } v < 0$$

$$\delta(v) = 1 \quad \text{si } v = 0$$

$$\delta(v) = 0 \quad \text{si } v \neq 0$$

λ : coefficient de frottement visqueux (= 0 si frottement sec).

3.8.3 Forces aérodynamiques

Un objet placé dans un fluide en mouvement subit une force de frottement qui agit dans le sens du mouvement du fluide. La variation de la force avec la vitesse v du fluide dépend du régime de l'écoulement.

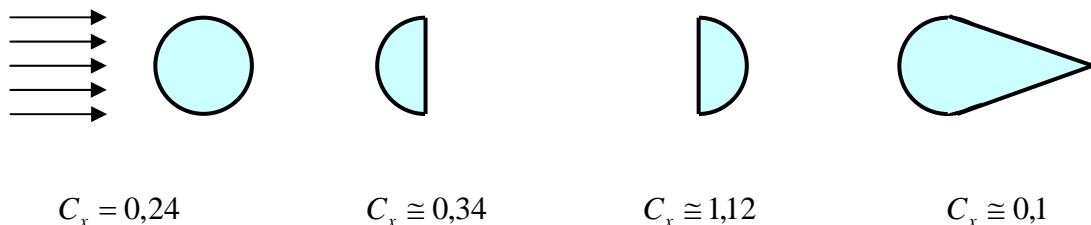
A basse vitesse, l'écoulement est laminaire et la force est proportionnelle à la vitesse. Dans le cas d'une sphère (bille), on peut montrer que la force est proportionnelle au rayon de la sphère R et à la viscosité dynamique⁶ du fluide η .

Formule de Stokes $F = 6\pi\eta Rv$ [N] (3.43)

A plus haute vitesse, l'écoulement devient turbulent et on constate expérimentalement que la force dépend du carré de la vitesse. Dans l'air, il est d'usage d'exprimer la force comme suit :

Force de traînée $F = \frac{1}{2} C_x \rho S v^2$ [N] (3.44)

Avec : C_x coefficient de traînée aérodynamique ;
 ρ masse volumique du fluide ;
 S section droite face au fluide.



La transition du régime laminaire au régime turbulent n'est pas franche. En dynamique des fluides, on introduit un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds.

Nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho D v}{\eta}$ [-] (3.45)

D est une dimension caractéristique de l'objet, par exemple $D = 2R$ dans le cas d'une sphère.

Critère : si le nombre de Reynolds est inférieur à 2300 environ, l'écoulement est laminaire, au-delà il est turbulent.

⁶ La viscosité dynamique est mesurée en Pa·s. Elle dépend fortement de la température. (Voir table CRM, p. 172.)

3.8.3.1 Exemple : Chute des corps en tenant compte de la résistance de l'air

Posons $\gamma = \frac{1}{2} C_x \rho S$ et écrivons l'équation du deuxième principe de la Dynamique.

$$m\vec{g} - \gamma^2 \frac{\vec{v}}{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3.46)$$

Avec : m masse du corps [kg].

Si on laisse tomber le corps avec une vitesse nulle au départ, \vec{v} garde le même sens, et on peut écrire pour le module v :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v^2 \quad (3.46')$$

La condition $\frac{dv}{dt} = 0$ nous donne la **vitesse limite** $v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}}$

L'équation (3.46') peut se résoudre comme suit :

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m} v^2$$

$$\frac{dv}{g - \frac{\gamma}{m} v^2} = dt$$

$$\int \frac{dv}{1 - \frac{\gamma}{mg} v^2} = \int g dt + Cste$$

Cette intégrale se trouve dans les tables : $\int \frac{dv}{1 - (av)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \tanh av$

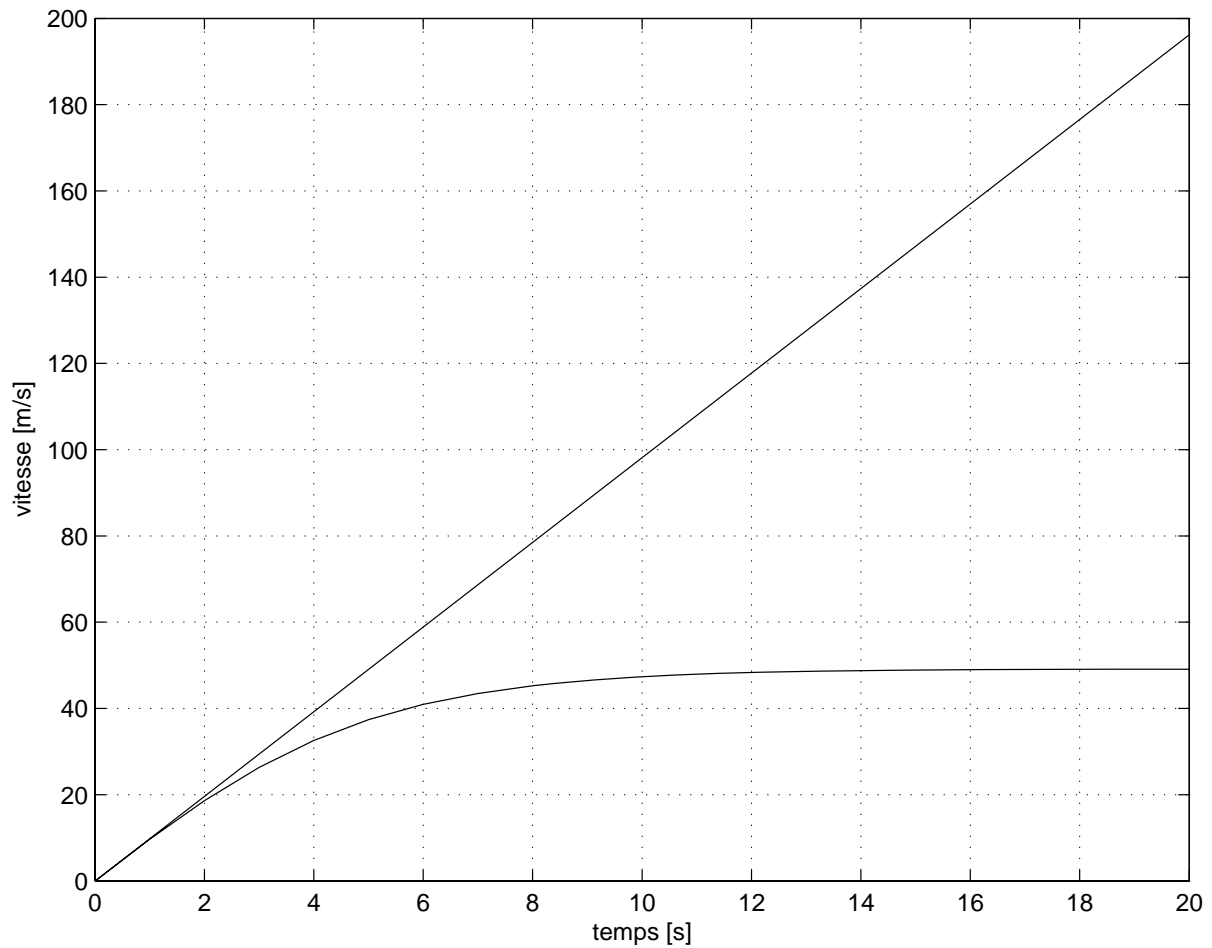
(arc tangente hyperbolique, pour $av < 1$).

Avec $a = 1/v_\ell$:

$$v_\ell \operatorname{arctan} \frac{v}{v_\ell} = gt + Cste$$

Si la vitesse initiale est nulle, alors :

Equation de la vitesse : $v(t) = v_\ell \tanh \frac{gt}{v_\ell}$ [m/s] (3.47)



Vitesse d'un corps en chute libre

Droite : $v(t) = gt$ sans frottement de l'air

Courbe : $v(t) = v_\ell \tanh \frac{gt}{v_\ell}$ avec frottement de l'air.

Parachutiste : valeurs numériques :

$$C_x = 1$$

$$\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$$

$$S = 0,5 \text{ m}^2$$

$$m = 80 \text{ kg}$$

\Rightarrow vitesse limite $v_\ell = 49 \text{ m/s}$ (177 km/h)

Estimons encore le nombre de Reynolds dans ce cas : $Re = \frac{\rho D v}{\eta} \approx \frac{(1,3) \cdot (0,5) \cdot 49}{1,8 \cdot 10^{-5}} = 1,77 \cdot 10^6$

Cette valeur est nettement plus grande que 2300. On est donc bien en présence du régime turbulent.

3.9 FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

La théorie de l'électromagnétisme fait en principe partie du cours PHY2. Cependant nous pouvons déjà étudier le mouvement d'une particule chargée lorsqu'elle est soumise à des forces électriques ou magnétiques. Commençons par la force électrique.

3.9.1 Force électrique entre deux charges ponctuelles

Il existe dans la nature deux types de charges, appelées positives et négatives. Les charges de même signe se repoussent, celles de signe contraire s'attirent. C'est Coulomb⁷ qui a le premier déduit de l'expérience la forme mathématique de la loi qui porte désormais son nom. Ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'elle présente la même dépendance en $1/r^2$ que la loi de la gravitation universelle, mais, dans le calcul, c'est les charges qui interviennent au lieu des masses.

	Loi de la gravitation, Newton (publiée en 1687)	Loi de Coulomb (~1784)	
Sous forme : scalaire :	$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$	(3-48)
vectorielle : (avec $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$)	$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$	(3-48')
Constantes :	$G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9876 \cdot 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$	
	Masses en kg	Charges en coulombs (C) 1 C = 1 ampère·seconde	

Les lois de bases étant semblables, les mouvements sont semblables. Le modèle planétaire de l'atome est analogue à un système solaire en miniature, le noyau jouant le rôle du Soleil et les électrons celui des planètes. (Ce modèle permet de faire un certain nombre de prédictions qui sont vérifiées expérimentalement, mais il n'explique pas tout. Il est aujourd'hui abandonné au profit du modèle quantique de l'atome.)

Lorsque plusieurs particules sont en présence, chaque particule ressent l'attraction ou la répulsion des autres. Les forces s'additionnent vectoriellement. Si l'on prend un système de n particules de charge q_i , la résultante agissant sur une particule de charge q s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i q \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

En mettant la charge q en évidence, on peut définir le champ électrique comme suit :

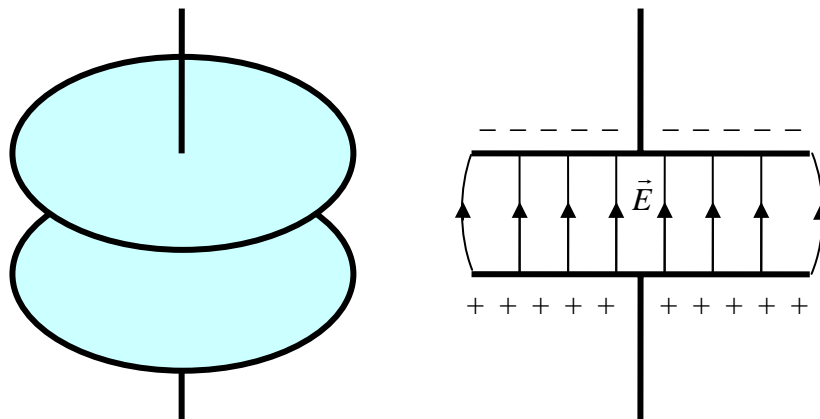
$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad [\text{N/C}] \equiv [\text{V/m}] \quad (3.49)$$

⁷ Charles de Coulomb, Angoulême 1736 – Paris, 1806.

Ainsi l'action des n charges est résumée en tout point de l'espace par un seul vecteur \vec{E} . Comme ce vecteur dépend de la position \vec{r} , on parle d'un *champ de vecteurs*, ou plus simplement de *champ*. La force $q\vec{E}$ s'appelle **force de Coulomb**.

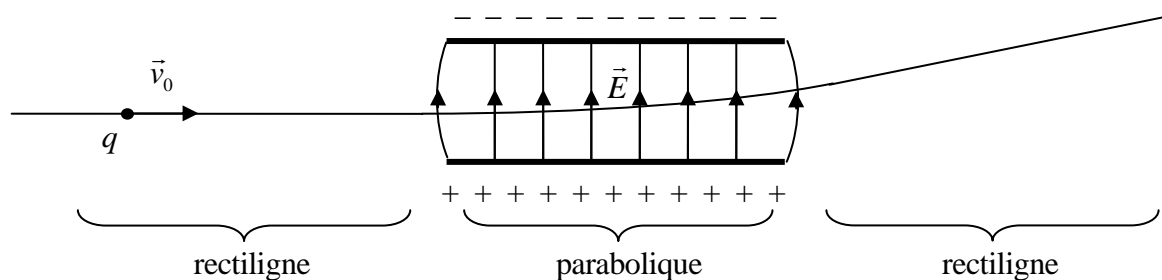
L'électrostatique est la partie de la physique qui traite spécifiquement du calcul du champ électrique à partir des distributions de charges. La répartition des charges sur un corps chargé est différente selon que ce corps est conducteur ou isolant. Comme chaque charge influence a priori toutes les autres, la résolution des problèmes d'électrostatique peut s'avérer complexe. Heureusement, dans de nombreux cas pratiques, les symétries des distributions de charges simplifient le calcul du champ électrique, car il reflète naturellement la symétrie de la distribution des charges qui l'engendre.

Ainsi, dans un condensateur plan, deux plaques métalliques, uniformément chargées, placées l'une en face de l'autre produisent un champ électrique homogène entre les plaques. Evidemment, près des bords, ce n'est plus le cas, mais plus grande est la dimension des plaques relativement à la distance qui les sépare, meilleure est l'uniformité du champ au centre des plaques.



3.9.1.1 Mouvement d'une particule dans un champ électrique uniforme

Dans un champ électrique uniforme, une particule de charge q subit une force constante égale à $q\vec{E}$, constante en amplitude, direction et sens, tout comme une masse m dans un champ de pesanteur uniforme subit une force $m\vec{g}$. La trajectoire est donc parabolique.



En appliquant une tension électrique variable aux plaques du condensateur, on obtient un champ électrique variable. La déviation de la particule est proportionnelle à la tension appliquée : c'est le principe du tube à rayons cathodiques, les particules étant dans ce cas des électrons.

L'exemple que nous venons de voir illustre la démarche générale pour calculer le mouvement d'une particule soumise à des forces électriques. On procède en deux étapes : d'abord on calcule en tout point le champ électrique produit par les charges, puis on applique le 2^{ème} principe de la Dynamique

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} \quad (3.50)$$

Les hypothèses sous-jacentes sont :

- La charge q est petite par rapport aux charges qui créent le champ électrique (autrement on ne pourrait négliger son influence sur ces dernières) ;
- Les charges qui créent le champ sont immobiles dans le référentiel galiléen où l'on applique le 2^{ème} principe ;
- La charge q n'agit pas sur elle-même.

L'introduction du champ électrique fournit donc un procédé de calcul, mais n'explique pas l'action à distance.

3.9.2 Force magnétique

Lorsque des charges sont en mouvement par rapport à un observateur fixe, il y a apparition d'un champ d'induction magnétique, noté \vec{B} , en plus du champ électrique \vec{E} . C'est le cas, par exemple, autour d'un fil électrique parcouru par un courant. La force totale ressentie par une particule comporte deux contributions, l'une électrique et l'autre magnétique.

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})} \quad [\text{N}] \quad (3.51)$$

Écrit sous cette forme, le terme $q\vec{v} \times \vec{B}$ s'appelle **force de Lorentz**. Cette force est à la fois perpendiculaire au champ \vec{B} et à la vitesse \vec{v} de particule par rapport à l'observateur fixe.

L'unité du champ d'induction magnétique a reçu le nom de tesla. $1 \text{ T} = 1 \text{ N}\cdot\text{s}/(\text{C}\cdot\text{m})$.

Le champ \vec{B} reflète aussi les symétries des courants électriques qui le créent. Au laboratoire, pour produire des champs relativement uniformes, on utilise des bobines allongées (solénoïdes), des arrangements de bobines ou des électroaimants. L'étude détaillée de ces dispositifs rentre dans le cadre du cours PHY2. Voyons cependant un cas intéressant, celui du mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme.

3.9.2.1 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme

Sans champ électrique additionnel, l'équation du mouvement est :

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a} \quad [\text{N}] \quad (3.52)$$

L'accélération étant la dérivée de la vitesse, on peut écrire :

$$q\vec{v} \times \vec{B} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Effectuons le produit scalaire de chaque membre de cette équation par \vec{v} , supposée non nulle.

$$q\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Le premier terme est nul, car il s'agit d'un produit mixte, où deux vecteurs sont égaux. Reste le second terme qui peut s'écrire :

$$0 = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt}$$

Le module de la vitesse est donc constant. Nous sommes donc en présence, soit d'un mouvement rectiligne uniforme (MRU), soit d'un mouvement circulaire uniforme (MCU), soit d'une superposition de ces deux mouvements. On a :

- un MRU lorsque la vitesse initiale de la particule est parallèle au champ \vec{B} ;
- un MCU lorsque la vitesse initiale de la particule est perpendiculaire au champ \vec{B} .

Dans le cas du MCU, en désignant par R le rayon de la trajectoire, le module de l'accélération centripète (2.15) vaut v^2/R . Introduisant cette expression dans (3.52), il vient :

$$qvB = m \frac{v^2}{R}$$

Rayon de Larmor

$$R = \frac{mv}{qB}$$

[m]

(3.53)

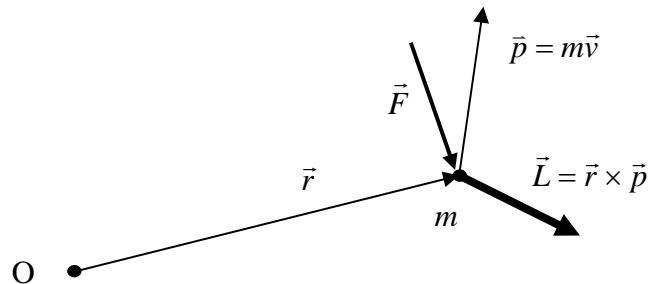
La période du mouvement est indépendante du rayon de la trajectoire. En effet :

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{m}{qB} \quad [\text{s}] \quad (3.54)$$

3.10 MOMENT CINÉTIQUE

3.10.1 Moment cinétique d'une particule

Considérons une particule de masse m repérée par un vecteur \vec{r} par rapport à un référentiel d'inertie et animée d'une vitesse \vec{v} . Sa quantité de mouvement est $\vec{p} = m\vec{v}$.



Déf. On appelle **moment cinétique d'une particule** la quantité définie par le produit vectoriel $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dans le système SI, l'unité de cette nouvelle observable est le $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$. Elle n'a pas reçu de nom particulier.

Voyons comment le moment cinétique est influencé par une force \vec{F} agissant sur la particule.

Prenons la dérivée de \vec{L} : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$

Le premier terme est nul car $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times (m\vec{v}) = 0$

Dans le second terme, on voit apparaître la force agissant sur la particule, en vertu du deuxième principe de Newton $\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Or, $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$ est le moment de la force agissant sur la particule. On a donc, en définitive :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}} \quad (3.55)$$

En l'absence d'une force agissant sur la particule, le moment cinétique est conservé. En effet, dans ce cas le moment de la force est nul et on a $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, donc $\vec{L} = \text{constante}$.

Il y a un autre cas très important où le moment cinétique de la particule est conservé, c'est le cas où la particule est soumise uniquement à une **force centrale**, c'est-à-dire à une force dont la direction passe constamment par un point fixe (O). Dans ce cas, \vec{F} a la même direction que \vec{r} et le produit $\vec{r} \times \vec{F}$ s'annule. La force de gravitation exercée par le Soleil sur une planète est un exemple de force centrale.

3.10.1.1 Moment cinétique d'une particule en mouvement circulaire uniforme.

Soit une particule de masse m tournant à vitesse constante autour d'un point O .

$$\text{Sous forme polaire : } \begin{cases} r = cste \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

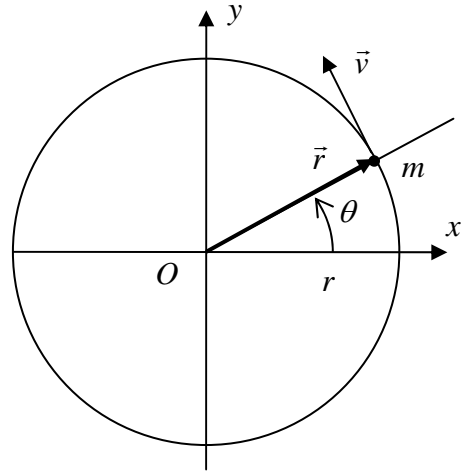
$\omega =$ vitesse angulaire $= cste$

Sous forme cartésienne :

$$\text{Position : } \vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}$$

$$\text{Vitesse : } \vec{v} = \omega r \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$\text{Accélération : } \vec{a} = -\omega^2 r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}$$



$$\text{Quantité de mouvement : } \vec{p} = m\vec{v} = m\omega r \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$\text{Moment cinétique : } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \times m\omega r \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = m\omega r^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\vec{L} est donc dirigé selon z , perpendiculairement au plan du dessin ci-dessus.

Moment cinétique d'une particule (MCU)

$$\boxed{|\vec{L}| = L = m\omega r^2} \quad (3.56)$$

Calculons encore son énergie cinétique en fonction de ω :

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

La quantité $I = mr^2$ est le **moment d'inertie** de la particule.

En utilisant I à la place de m , nous pouvons récrire l'expression du moment cinétique.

Moment cinétique d'une particule (MCU)

$$\boxed{L = I\omega} \quad (3.56')$$

En résumé, nous avons donc les analogies suivantes entre le mouvement rectiligne et le mouvement circulaire d'une particule.

	Mouvement rectiligne	Mouvement circulaire
	Masse : m	Moment d'inertie : I
	Vitesse : v	Vitesse angulaire : ω
Quantité de mouvement	$p = mv$	
Moment cinétique		$L = I\omega$
Energie cinétique	$\frac{1}{2}mv^2$ ou $\frac{p^2}{2m}$	$\frac{1}{2}I\omega^2$ ou $\frac{L^2}{2I}$
Equation de la Dynamique	$\frac{dp}{dt} = F$	$\frac{dL}{dt} = M$

3.10.1.2 Moment cinétique d'une particule en mouvement circulaire non uniforme.

Dans le cas général, le module du rayon vecteur, r , et l'angle θ dépendent du temps.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \cos \theta - (r \sin \theta) \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dr}{dt} \sin \theta + (r \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix}$$

Moment cinétique
d'une particule en
coordonnées polaires

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (3.56'')$$

Lorsque $\frac{d\theta}{dt} = \omega = cste$, on retrouve l'expression (3.56).

Note: pour alléger l'écriture, on exprime parfois la dérivation temporelle par un point au dessus de l'observable. Exemples:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (\text{theta point}) & \dot{\omega} &= \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \quad (\text{theta deux points}) \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \dot{\vec{r}} & \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \ddot{\vec{r}} & L &= m r^2 \dot{\theta} \end{aligned}$$

3.10.2 Vitesse aréolaire – Loi des aires

Déf. On appelle vitesse aréolaire la surface balayée par le rayon vecteur par unité de temps.

Montrons que la vitesse aréolaire est égale à la moitié du module du produit vectoriel $\vec{r} \times \vec{v}$.

En effet, pendant un temps infinitésimal Δt , la surface balayée est égale à $\Delta A = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} \Delta t|$, par définition du produit vectoriel (§3.5.1). En passant à la limite : $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}|$

Nous avons vu que dans le cas d'une force centrale, le moment cinétique était une constante du mouvement. Comme la vitesse aréolaire est proportionnelle au moment cinétique, elle est également constante. En ce qui concerne le mouvement des planètes autour du Soleil, ceci est connu sous le nom de loi des aires :

Une ligne joignant le Soleil à la planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux. Ceci est l'énoncé de la **deuxième loi de Képler** (1609).

Pour mémoire :

Première loi de Képler : Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers (1609).

Troisième loi : les carrés des temps de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes (1619).

La deuxième loi est une conséquence du mouvement central, la dépendance de la force en $1/r^2$ n'intervient pas. Les deux autres lois, en revanche, impliquent la dépendance en $1/r^2$.

Expression de la vitesse aréolaire en coordonnées polaires : $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$

Où nous avons utilisé (3.56''). Dans le cas d'une particule soumise à une force centrale, la quantité $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est une seconde **constante du mouvement**. (La première est l'énergie.)

3.10.3 Moment cinétique d'un ensemble de particules

Le moment cinétique d'un ensemble de particules est simplement la somme des moments cinétiques des particules.

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (3.57)$$

La somme sur i s'étend à l'ensemble des particules.

Nous allons maintenant appliquer cette définition pour calculer le moment cinétique d'un solide en rotation.

3.10.4 Moment cinétique d'un solide en rotation

Le cas général est assez compliqué. Pour simplifier, nous faisons les hypothèses suivantes :

- le solide est indéformable ;
- il tourne autour d'un axe passant par son centre de gravité G .

Calculons le moment cinétique du solide par rapport à l'axe de rotation.

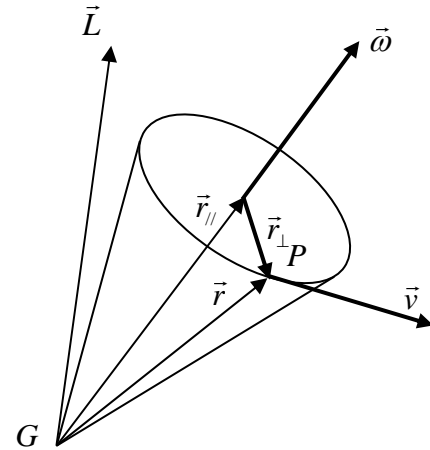
Le mouvement de rotation du solide est caractérisé par un **vecteur rotation** $\vec{\omega}$ défini comme suit :

- La direction de $\vec{\omega}$ est celle de l'axe de rotation.
- Le module de $\vec{\omega}$ est égal à la vitesse angulaire.

La trajectoire d'un point P est un cercle entourant l'axe de rotation.

La vitesse d'un point P du solide, repéré par le vecteur-position \vec{r} , est alors donnée par le produit vectoriel $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Le sens de $\vec{\omega}$ est tel que $\vec{\omega}$, \vec{r} et \vec{v} forment un trièdre direct.



Décomposons \vec{r} en composantes perpendiculaire et parallèle à $\vec{\omega}$:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel) = \vec{\omega} \times \vec{r}_\perp$$

Le module de \vec{v} est bien égal au produit de la vitesse angulaire par le rayon du cercle. Sa direction est bien tangente au cercle à tout instant.

Considérons au point P un élément de volume $dV = dx dy dz$ du solide. Sa masse infinitésimale est $dm = \rho dV$, où ρ est la masse volumique. Considérons les éléments de volume comme des particules et appliquons la définition (3.57). La somme devient une intégrale sur le volume du solide.

$$\vec{L} = \int_V \vec{r} \times (\rho dV) \vec{v} \tag{3.57'}$$

Introduisons $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ et souvenons-nous de la formule $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$\vec{L} = \int_V (\rho dV) \vec{r} \times \vec{v} = \int_V (\rho dV) \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \int_V (\rho dV) \{r^2 \vec{\omega} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})\}$$

En composantes :

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \int_V \rho \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} dV \equiv (\mathbf{I}) \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{3.58}$$

I est appelé **tenseur d'inertie**. Ses composantes sont les **moments d'inertie** du solide.

Dans le cas général, le calcul du moment cinétique fait donc intervenir 9 intégrales. Les directions du moment cinétique et du vecteur-rotation ne sont pas forcément parallèles. Lorsque le solide possède des symétries, le calcul se simplifie beaucoup si l'on fait coïncider les axes x , y , z avec les axes de symétrie du solide.

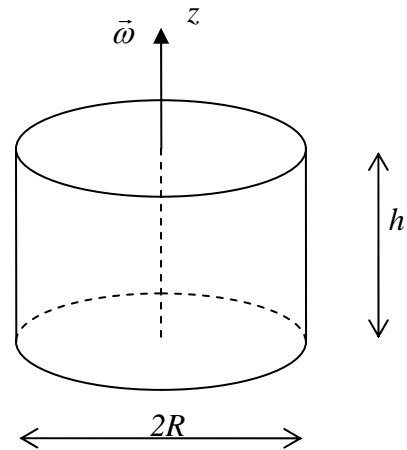
Exemple :

Cylindre homogène en rotation autour de son axe de symétrie

$$\text{Vecteur-rotation : } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Masse volumique : ρ (constante)

Volume : $V = \pi R^2 h$



$$I_{zz} = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV = \rho \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho \int_{-h/2}^{h/2} dz \iint (x^2 + y^2) dx dy$$

Passer en coordonnées polaires : $x^2 + y^2 = r^2$, $dx dy = r dr d\theta$

$$I_{zz} = \rho h \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 r dr = \rho h 2\pi \frac{R^4}{4} = \rho h \frac{\pi}{2} R^4$$

Introduisant la masse du cylindre $\mu = \rho V = \rho \pi R^2 h$, il vient $I_{zz} = \frac{1}{2} \mu R^2$.

Moment cinétique : $L_z = I_{zz} \omega_z = \frac{\mu R^2}{2} \omega_z$

Calcul de l'énergie cinétique d'un cylindre homogène en rotation.

Elle s'obtient en sommant les énergies cinétiques de tous les éléments de volume

$$E_{rot} = \int_V \frac{1}{2} (\rho dV) v^2 = \frac{\rho}{2} \iiint v^2 dx dy dz = \frac{\rho}{2} \iiint (\omega_z r)^2 dx dy dz = \omega_z^2 \frac{\rho}{2} \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz$$

On voit qu'on arrive à la même intégrale que celle calculée ci-dessus pour I_{zz} .

En résumé :

Moment d'inertie

$$I_{zz} = \frac{1}{2} \mu R^2$$

[kg·m²]

Moment cinétique

$$L_z = I_{zz} \omega_z$$

[kg·m²/s]

Energie cinétique de rotation

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2$$

[J]

(3.59)

3.11 DYNAMIQUE DU SOLIDE

Au § 3.6.1 nous avons vu le deuxième principe de la dynamique (Newton) pour un ensemble de particules. La variation de la quantité de mouvement totale est égale à la résultante des forces extérieures. Ceci est également valable pour un solide, qui est un ensemble de particules solidaires.

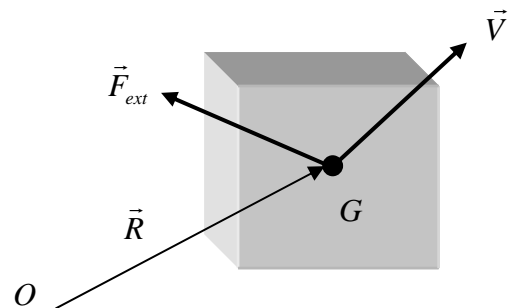
$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}} \quad (3.60)$$

\vec{F}_{ext} Résultante des forces extérieures

$\vec{P} = \mu\vec{V}$ Quantité de mouvement du solide

μ Masse du solide

\vec{V} Vitesse du centre de masse du solide



L'équation (3.60) permet de ramener le calcul du mouvement du solide à celui d'un point matériel situé au centre de masse du solide (G). On considère que la résultante des forces extérieures s'applique au point G et que toute la masse y est concentrée.

Nous pouvons donc calculer le mouvement de translation du solide. Voyons maintenant ce qui en est de son mouvement de rotation autour du centre de masse. Dans le cas général d'un solide soumis à plusieurs forces, nous avons vu au § 3.5.3 qu'il pouvait aussi subsister un couple. C'est ce couple qui tend à modifier le mouvement de rotation du solide. Généralisant l'équation (3.55) à l'ensemble des particules du solide, nous pouvons écrire :

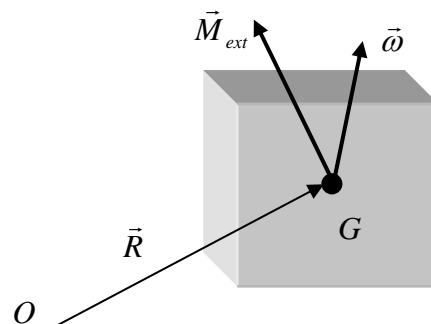
$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext}} \quad (3.61)$$

\vec{M}_{ext} Moment (couple) résultant des forces extérieures

$\vec{L} = (I)\vec{\omega}$ Moment cinétique du solide

(I) Tenseur d'inertie du solide

$\vec{\omega}$ Vecteur-rotation



Ainsi le problème du mouvement du solide est ramené à la résolution de six équations différentielles, trois pour le centre de masse et trois pour le vecteur-rotation. Si la forme des

équations (3.60) et (3.61) est simple, on est souvent conduit en pratique à des calculs assez ardues lorsqu'on choisit des systèmes de coordonnées, ce qui mène à des équations différentielles qui lient les composantes des vecteurs \vec{V} et $\vec{\omega}$ entre elles..

L'énergie cinétique du solide se compose de deux termes, l'énergie cinétique de translation et l'énergie cinétique de rotation. En prenant z pour axe de rotation :

$$E_{cin} = E_{trans} + E_{rot} = \frac{1}{2} \mu V^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2 \tag{3.62}$$

3.12 DYNAMIQUE DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

C'est seulement dans un référentiel d'inertie ou galiléen que les principes de la dynamique s'énoncent comme nous l'avons vu précédemment. Dans un référentiel mobile accéléré et/ou tournant, on ne peut pas écrire simplement $\vec{F} = m\vec{a}_m$, où \vec{a}_m est l'accélération mesurée dans le référentiel mobile, car il faut tenir compte des forces liées au mouvement du référentiel mobile, comme nous allons le voir ci-après.

Soit un système de coordonnées $Oxyz$ lié au référentiel fixe (galiléen) et $O'x_my_mz_m$ un système de coordonnées mobiles lié au référentiel mobile (non galiléen). Soit $\vec{\omega}$ le vecteur de rotation instantanée du référentiel mobile par rapport au référentiel fixe.

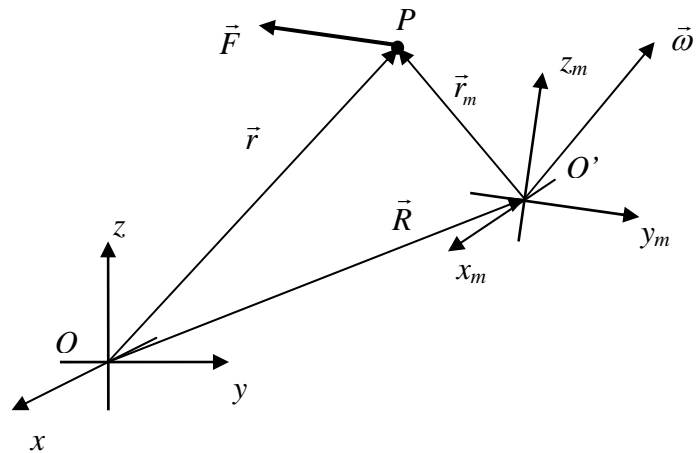
Une particule P est repérée par \vec{r} dans $Oxyz$
et par \vec{r}_m dans $O'x_my_mz_m$

Dans le référentiel mobile,

sa vitesse vaut : $\vec{v}_m = \frac{d\vec{r}_m}{dt}$

son accélération : $\vec{a}_m = \frac{d\vec{v}_m}{dt}$

Soit \vec{R} le vecteur \vec{OO}' .



Position

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}_m \tag{3.63}$$

Pour obtenir la vitesse, il ne suffit pas de prendre la dérivée terme à terme de la position dans l'expression ci-dessus. Il faut aussi tenir compte de la vitesse due à la rotation instantanée du référentiel mobile, qui est égale à $\vec{\omega} \times \vec{r}_m$. (Définition du vecteur-rotation, voir § 3.10.4)

Vitesse

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}_m}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_m \\ \vec{v} &= \vec{V} + \vec{v}_m + \vec{\omega} \times \vec{r}_m \end{aligned} \tag{3.64}$$

Dans le cas où il n'y a pas de rotation, nous retrouvons la loi d'addition vectorielle des vitesses. La vitesse dans le référentiel fixe (\vec{v}) égale la vitesse d'entraînement (\vec{V}) plus la vitesse relative (\vec{v}_m).

Pour obtenir l'accélération, il faut itérer l'opération de dérivation et de multiplication vectorielle par $\vec{\omega}$ aux observables mesurées dans le référentiel mobile.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{v}_m + \vec{\omega} \times \vec{r}_m) + \vec{\omega} \times (\vec{v}_m + \vec{\omega} \times \vec{r}_m) \\ \vec{a} &= \vec{A} + \vec{a}_m + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_m + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_m}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}_m + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_m)\end{aligned}$$

Accélération $\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}_m + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_m + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_m) + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_m)$ (3.65)

Remplaçons cette expression dans le deuxième principe $\vec{F} = m\vec{a}$:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{A} + m\vec{a}_m + m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_m + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_m) + 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_m)$$

Soit, en exprimant l'accélération de la particule en fonction des forces :

$m\vec{a}_m = \vec{F} - m\vec{A} - m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_m - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_m) - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_m)$ (3.66)

Telle est l'expression générale du deuxième principe dans un référentiel mobile non galiléen. Analysons les quatre termes qui modifient la force \vec{F} subie par la particule.

- $- m\vec{A}$ force liée à l'accélération d'entraînement,
- $- m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_m$ force liée à la non uniformité de la vitesse de rotation,
- $- m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_m)$ force centrifuge (son sens s'éloigne de l'axe de rotation),
- $- 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_m)$ force de Coriolis.

Ainsi un observateur placé dans un référentiel mobile non galiléen doit tenir compte des termes supplémentaires ci-dessus pour expliquer et prévoir correctement les mouvements par rapport à ce référentiel.

4. MÉCANIQUE DES MILIEUX DÉFORMABLES

Dans les chapitres précédents (cinématique, dynamique) nous nous sommes intéressés aux mouvements de particules individuelles ou rigidement liées entre elles pour constituer un solide supposé indéformable. En réalité, l'expérience nous montre que tous les corps solides sont plus ou moins déformables lorsqu'on leur applique des **contraintes**. D'autre part, en plus de l'état solide, la matière peut aussi exister à l'état liquide ou gazeux. Le but de ce chapitre est d'étudier quelques propriétés de la matière homogène, considérée comme un milieu continu. Il s'agit bien sûr d'une hypothèse simplificatrice, puisque nous savons que la matière est faite d'atomes. Cependant, à l'échelle macroscopique, cette simplification permet de traiter efficacement beaucoup de problèmes pratiques. L'étude des propriétés des solides à partir des interactions au niveau atomique ou moléculaire est l'objet d'une vaste partie de la physique; la physique du solide. De plus, nous ferons abstraction dans ce chapitre des phénomènes liés à la température. Nous étudierons ces phénomènes dans une autre partie du cours consacrée à la thermique et à la thermodynamique.

De même que la particule, ou point matériel, constitue en mécanique une idéalisation d'un objet dont on désire étudier le mouvement, on introduit dans l'étude des milieux continus les définitions idéalisées suivantes :

Le **solide parfait** est un corps rigide indéformable. Dans la majorité des applications où l'on doit admettre qu'un solide se déforme, on admettra qu'il est **parfaitement élastique**, c'est-à-dire qu'il reprend sa forme lorsque la cause de la déformation cesse.

Le **liquide parfait** est un corps infiniment déformable (non visqueux) mais incompressible (son volume ne change pas sous l'effet de la pression).

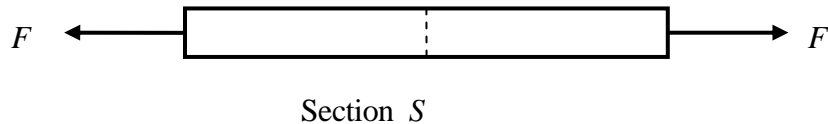
Le **gaz parfait** est un corps infiniment déformable dont le volume n'est pas défini a priori. Un gaz tend à occuper tout le volume à sa disposition. Son volume est inversement proportionnel à la pression qu'il supporte.

Dans les sous-chapitres suivants, nous allons donc étudier les propriétés mécaniques élémentaires des corps solides, liquides et gazeux. Pour une étude plus exhaustive, il faut se reporter aux ouvrages traitant de résistance des matériaux, de physique du solide, de mécanique des fluides, etc... Comme le reste du cours, ce chapitre se veut seulement un « ouvrier de portes ».

4.1 LES SOLIDES

4.1.1 Contrainte

Considérons une barre de section de section S en équilibre sous l'effet de deux forces F égales mais divergentes.



On dit que la barre est soumise à une contrainte de traction.

Déf. La contrainte de traction (normale) est égale à la force de traction par unité de surface de section.

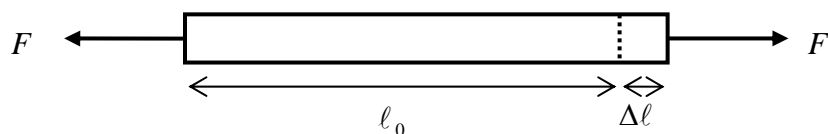
Contrainte de traction $\sigma = \frac{F}{S}$ [N/m²] (4.1)

L'unité de contrainte a la dimension d'une force divisée par une surface. Dans le système SI l'unité naturelle est donc le N/m². Comme cette contrainte est très faible, on utilise en pratique le N/mm².

Lorsque les forces sont convergentes, on parle de **contrainte de compression**.

4.1.2 Déformation

Sous l'effet d'une contrainte de traction, les matériaux solides subissent une déformation que l'on peut caractériser par l'allongement spécifique.

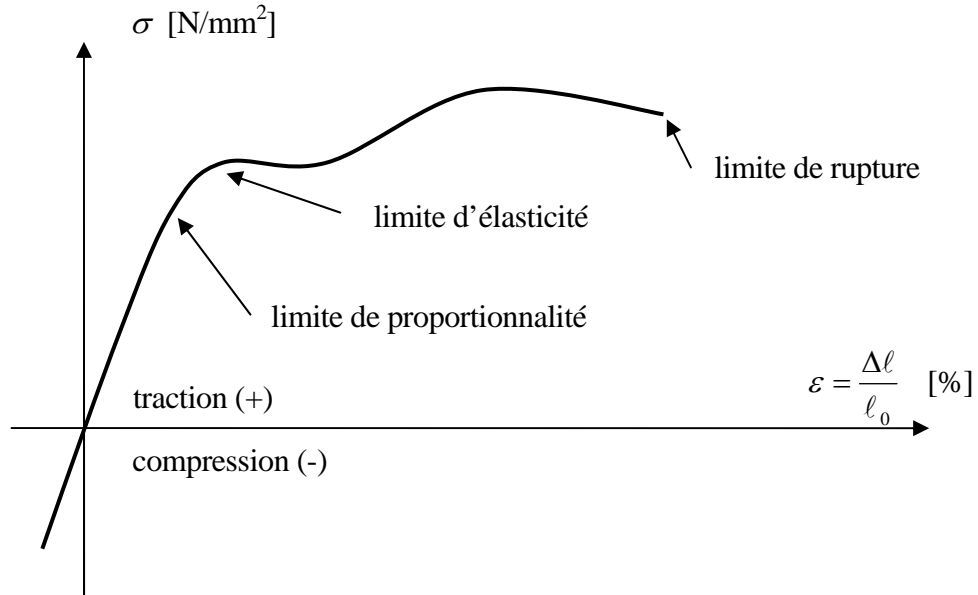


Déf. On appelle allongement spécifique le quotient de l'allongement par la longueur initiale.

Allongement spécifique $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ (4.2)

Quotient de deux longueurs, l'allongement spécifique est une grandeur sans dimension. On utilise aussi le terme d'allongement relatif.

Un diagramme dans lequel on reporte en abscisse l'allongement spécifique et en ordonnée la contrainte a généralement l'allure ci-après.



Tant que la contrainte est inférieure à une limite qui dépend du matériau, l'allongement spécifique est proportionnel à la contrainte. C'est la loi de Hooke.

Loi de Hooke

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E}}$$

(4.3)

Autre expression, en fonction de F , la force appliquée et de S , la surface de la section.

$$\boxed{F = ES \frac{\Delta \ell}{\ell_0}}$$

[N]

(4.3')

E est le **module d'élasticité**, ou **module d'Young** (parfois noté Y).

Lorsqu'on étire une barre, on constate que les dimensions de sa section subissent une contraction proportionnelle à l'allongement. C'est la loi de Poisson.

Pour une section carrée de dimension $e \cdot e = S$:

Loi de Poisson

$$\boxed{\frac{\Delta e}{e} = -\mu \frac{\Delta \ell}{\ell_0}}$$

(4.4)

μ est le **coefficient⁸ de Poisson**. Sa valeur est généralement comprise entre 0,3 et 0,5.

⁸ Parfois appelé aussi module de Poisson

Exemples de calcul :

a) Variation de volume d'une barre soumise à une traction (dans le sens de sa longueur)

A partir des lois de Hooke et de Poisson, on peut calculer la variation de volume de la barre en fonction de la contrainte de traction :

$$\begin{aligned}\Delta V &= (\ell_0 + \Delta\ell)(e + \Delta e)(e + \Delta e) - \ell_0 e^2 \\ \Delta V &\approx \ell_0 e^2 + (\Delta\ell)e^2 + 2(\Delta e)\ell_0 e - \ell_0 e^2 \\ \frac{\Delta V}{V} &= \frac{(\Delta\ell)e^2 + 2(\Delta e)\ell_0 e}{\ell_0 e^2} = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} + 2\frac{\Delta e}{e} \\ \frac{\Delta V}{V} &= \frac{\Delta\ell}{\ell_0} (1 - 2\mu)\end{aligned}$$

b) Variation de volume d'un cube soumis à des contraintes égales sur toutes ses faces

Soit a l'arête du cube. Chaque arête s'allonge de Δa sous l'effet de la traction parallèle à ladite arête et se contracte de $-2\mu\Delta a$ sous l'effet des tractions selon les deux directions perpendiculaires. Total pour une arête : $(1 - 2\mu)\Delta a$.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V}{V} &= \frac{(a + (1 - 2\mu)\Delta a)^3 - a^3}{a^3} \approx \frac{3a^2(1 - 2\mu)\Delta a}{a^3} = 3(1 - 2\mu)\frac{\Delta a}{a} \\ \frac{\Delta V}{V} &= 3(1 - 2\mu)\frac{\sigma}{E}\end{aligned}$$

Note : pour les liquides et les gaz, nous définirons la compressibilité comme étant $\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta P}$

où ΔP est la variation pression causant une diminution de volume ΔV et κ le coefficient de compressibilité. La contrainte de traction étant l'opposé d'une compression, on a donc pour les solides $\kappa = \frac{3(1 - 2\mu)}{E}$. L'unité du coefficient compressibilité est le Pa^{-1} .

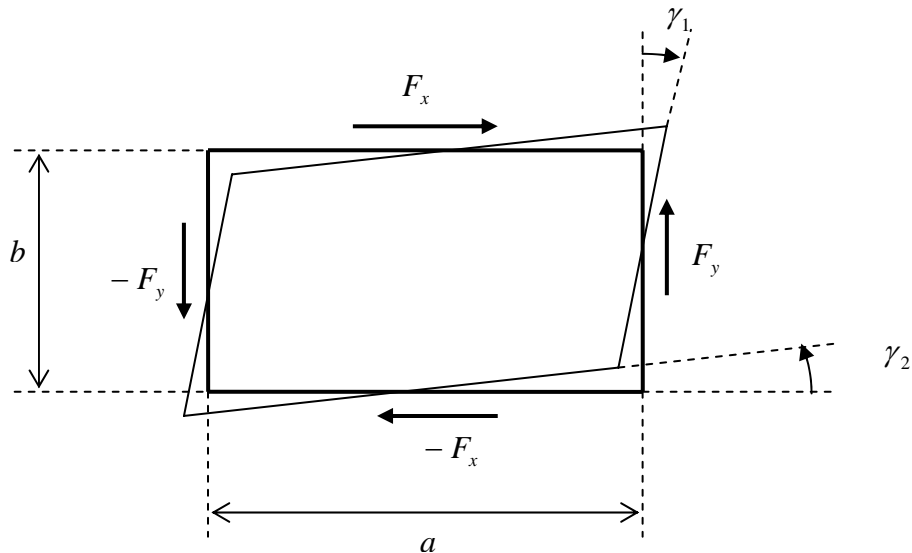
Son inverse est le **module de compression** : $K = \frac{1}{\kappa}$ [Pa] ou [N/m²]

Matière	ρ	E	μ	K	G
	[kg/m ³]	[N/m ²]	[N/m ²]	[Pa = N/m ²]	[N/m ²]
Acier	7850	$2,00 \cdot 10^{11}$	0,29	$1,4 \cdot 10^{11}$	$0,80 \cdot 10^{11}$
Fer	7870	$2,06 \cdot 10^{11}$	0,27	$1,13 \cdot 10^{11}$	$0,82 \cdot 10^{11}$
Cuivre	8960	$1,25 \cdot 10^{11}$	0,32	$1,31 \cdot 10^{11}$	$0,46 \cdot 10^{11}$
Aluminium	2710	$0,70 \cdot 10^{11}$	0,13	$0,61 \cdot 10^{11}$	$0,24 \cdot 10^{11}$

Modules de quelques matières solides usuelles

4.1.3 Cisaillement

Examinons maintenant les déformations provoquées par des contraintes tangentielles. Considérons un parallélépipède soumis à un couple de forces tangentielles à deux faces opposées. En fait, pour qu'il soit à l'équilibre, il faut aussi un couple opposé résultant de forces tangentielles à deux autres faces.



La condition d'équilibre, « somme des moments égale zéro », donne $bF_x = aF_y$. Soit c la longueur du 3^{ème} côté. En divisant cette équation membre à membre par abc , il vient : $\frac{F_x}{ac} = \frac{F_y}{bc}$

Déf. La contrainte tangentielle est le quotient de la force tangentielle par la surface du côté où elle s'applique.

Contrainte tangentielle $\tau = \frac{F_x}{ac} = \frac{F_y}{bc}$ [N/m²] (4.5)

Angle de déformation : $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

Dans le domaine élastique, l'angle de déformation est proportionnel à la contrainte.

Loi du cisaillement simple $\gamma = \frac{\tau}{G}$ (4.6)

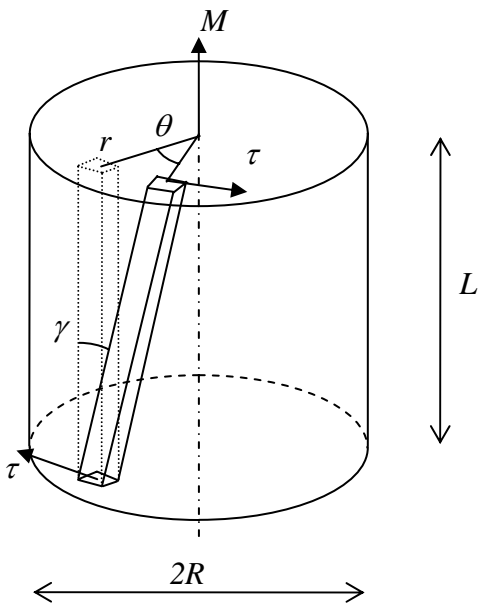
Où G est le module de cisaillement. Il s'exprime aussi en N/mm².

On peut démontrer qu'il est lié aux autres modules par la relation.

$G = \frac{E}{2(\mu + 1)}$ [N/m²] (4.7)

4.1.4 Torsion

Lorsqu'on soumet un objet à un couple de forces, l'expérience montre qu'il se tord. Dans ce cas, la déformation est appelée torsion. Dans la limite d'élasticité, l'angle de torsion est proportionnel au couple appliqué et inversement proportionnel au module de cisaillement, comme nous allons le voir ci-après. Prenons une barre de diamètre D et de longueur L soumise à un couple M .



Un élément de surface dS situé entre r et $r+dr$ subit une contrainte de cisaillement τ .

L'angle de déformation vaut : $\gamma = \frac{\tau}{G}$

Les angles θ et γ sont liés par : $L\gamma = r\theta$

Donc $\tau = G\gamma = G\frac{r\theta}{L}$

D'autre part, le moment élémentaire engendré par les forces τdS vaut $dM = r\tau dS$.

En coordonnées polaires, l'élément de surface vaut $dS = r dr d\varphi$.

En intégrant les moments élémentaires sur toute la surface de la section, il vient :

$$M = \iiint dM = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \tau dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R r G \frac{r\theta}{L} r dr d\varphi = \frac{G\theta}{L} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{G\theta}{L} 2\pi \frac{R^4}{4}$$

$$\boxed{M = \frac{G}{L} I_0 \theta} \quad \text{avec} \quad \boxed{I_0 = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}} \quad (4.8)$$

Où I_0 est le moment d'inertie polaire de la surface de section circulaire et D le diamètre.

Dans le cas d'un **ressort** caractérisé par $F = kx$, on peut démontrer que la constante k peut s'exprimer par la formule suivante :

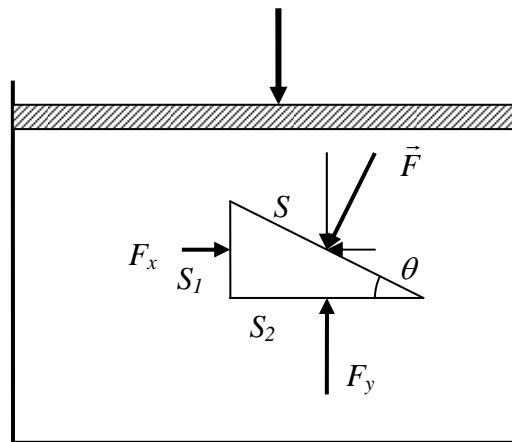
Constante d'un ressort $\boxed{k = G \frac{d^4}{8D^3 n_a}}$ [N/m] (4.9)

Avec d diamètre du fil,
 D diamètre moyen des spires,
 n_a nombre de spires actives.

4.2 LES LIQUIDES

4.2.1 Pression

Considérons un liquide à l'équilibre contenu dans un récipient et imaginons par la pensée un petit élément prismatique comme dessiné ci-dessous.



Soit F , F_x , F_y les forces s'exerçant sur trois faces d'aire S , S_1 , S_2 respectivement. Ces forces sont normales aux surfaces **Dans un liquide au repos, il n'y a pas de contraintes tangentielles**. En effet, s'il en existait, elles tendraient à faire glisser les couches de liquide les unes par rapport aux autres, ce qui contredirait l'hypothèse d'équilibre.

Les trois forces étant concourantes, la condition d'équilibre de l'élément de liquide est donnée par la condition « somme des forces égale zéro ». Ce qui implique :

$$\begin{cases} F \sin \theta = F_x \\ F \cos \theta = F_y \end{cases}$$

Géométriquement, on a pour les surfaces :

$$\begin{cases} S \sin \theta = S_1 \\ S \cos \theta = S_2 \end{cases}$$

En divisant membre à membre ces relations, on obtient :

$$\frac{F}{S} = \frac{F_x}{S_1} = \frac{F_y}{S_2}$$

On en conclut que le rapport entre la force et la surface ne dépend pas de l'orientation de la surface. Ce qui légitime la définition suivante :

Déf. Soit S une surface plongée dans un liquide et subissant de la part du liquide une force F , on appelle pression le quotient F/S .

Remarques :

- La définition donnée est valable pour tous les **fluides** : liquides ou gaz.
- La définition est valable pour un fluide au repos, c'est la **pression statique** ou pression hydrostatique.
- A la différence des solides, il n'y a pas de contrainte de traction dans un fluide : on parle uniquement de pression. Si l'on essaie d'imposer une contrainte de traction à un liquide, en tirant un piston par exemple, on constate expérimentalement qu'il se forme un espace « vide » dans lequel une toute petite partie du liquide s'évapore.

Si le fluide est non pesant, c'est-à-dire non soumis aux forces de gravitation, la pression est la même en tout point. Ceci est connu sous le nom de principe de Pascal.

Principe de Pascal

La pression exercée sur une portion de la surface fermée enveloppant un fluide est intégralement transmise à toute autre portion de surface en contact avec le fluide.

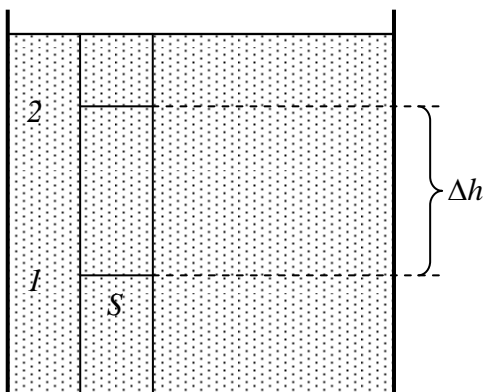
Ceci est très important pour les applications techniques, telles que pistons hydrauliques.

En l'honneur de Blaise Pascal, mathématicien, physicien, philosophe et écrivain français (1623-1662), l'unité de pression a reçu le nom pascal, Pa en abrégé.

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

4.2.2 Hydrostatique

On désigne par hydrostatique la théorie de l'équilibre des liquides, notamment lorsqu'ils sont soumis à la pesanteur. Dans ce cas la pression augmente avec la profondeur.



Considérons deux points du liquide séparés par une différence de hauteur Δh . Soit S un élément de surface horizontale.

Le fluide étant en équilibre, cet élément de surface supporte le poids de la colonne liquide située au-dessus, soit $F = (\rho S \Delta h)g$, où ρ est la masse volumique du liquide, supposée constante (**liquide incompressible**).

La différence de pression est donc égale à

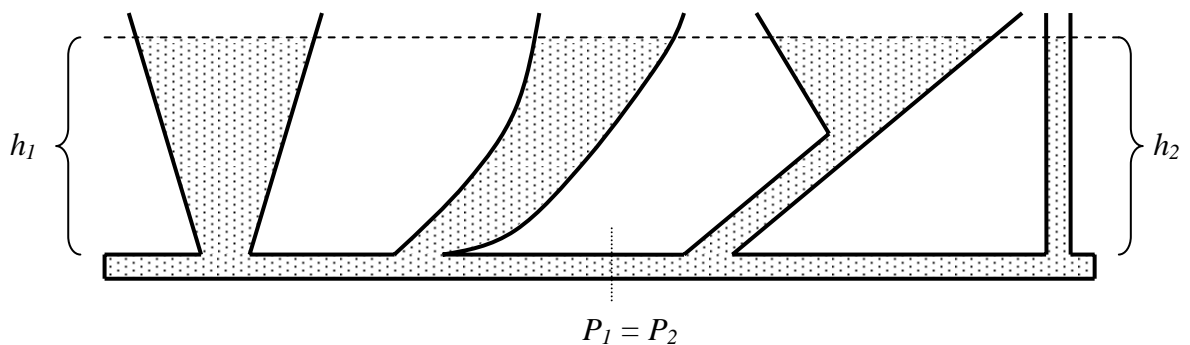
$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{F}{S} = \rho g \Delta h$$

Cette relation constitue le théorème fondamental de l'hydrostatique :

$$\boxed{\Delta P = \rho g \Delta h} \quad [\text{Pa}] \quad (4.10)$$

Les applications du théorème fondamental de l'hydrostatique sont innombrables, de même que les preuves expérimentales. Historiquement, la plus célèbre est celle du **crève-tonneau de Pascal**. Un tonneau, dressé sur une de ses bases, est surmonté d'un tube de petit diamètre, fixé perpendiculairement à la face supérieure. Le tonneau, et ensuite le tube sont remplis d'eau. Si le tube est assez long, la pression qui s'exerce contre les parois est alors assez forte pour disjoindre les douves du tonneau. Ceci s'explique par le fait que la pression dépend uniquement de la hauteur du liquide. La même quantité d'eau versée uniformément sur la face supérieure du tonneau n'aurait aucun effet.

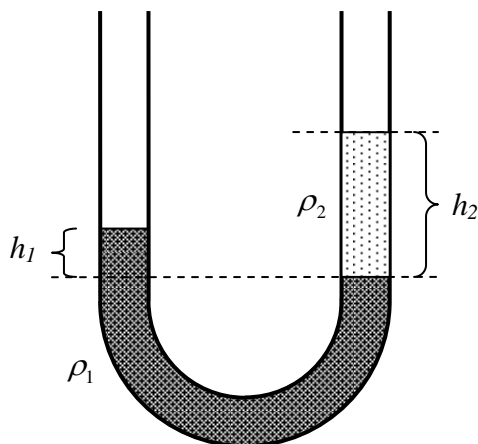
Les vases communicants



L'équilibre implique l'égalité des pressions : $P_1 = P_2$, donc $\rho gh_1 = \rho gh_2$, d'où $h_1 = h_2$.
En conclusion le niveau est le même dans chaque vase.

Le tube en U

C'est un dispositif qui permet de mesurer des pressions ou de comparer les masses volumiques de liquides non miscibles (qui ne se mélangent pas).



A l'équilibre, les pressions au niveau de la surface de séparation sont égales.

$$\text{Donc : } \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$$

$$\text{Après simplification par } g : \boxed{\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2}$$

L'emploi du tube en U conduit à naturellement à l'usage d'unités secondaires pour la pression.

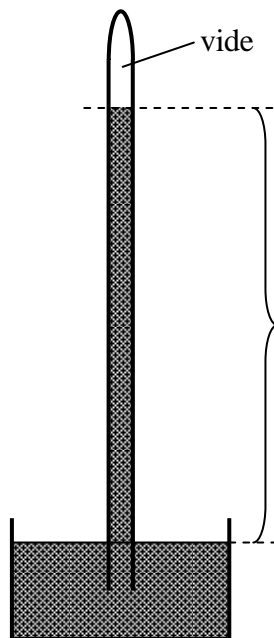
Le millimètre de mercure, mm Hg en abrégé 1 mm Hg = 133,322 Pa (= 1 Torr)

Le millimètre d'eau, mm H₂O en abrégé 1 mm H₂O = 9,806 65 Pa

4.2.3 La pression atmosphérique

En remplissant de mercure un tube de verre fermé à l'une de ses extrémités, puis en le dressant verticalement sans que l'air puisse y pénétrer, il est possible de mesurer la pression atmosphérique.

(Expérience de Torricelli.)



$h = 760 \text{ mm}$ (en moyenne au niveau de la mer)

$$P_{atm} = 760 \text{ mm Hg} = 101\,325 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$$

$$P_{atm} = 721,5 \text{ mm Hg} \text{ à Yverdon-les-Bains (alt. 435 m)}$$

L'air étant compressible, la pression atmosphérique n'est pas proportionnelle à l'altitude. En fait elle suit avec une bonne approximation une loi exponentielle ; elle diminue de moitié tous les 5500 m. (Voir § 4.3.2)

Usuellement, en météo, on donne la pression atmosphérique en hPa (hectopascal), ceci pour être compatible avec une ancienne unité, le millibar.

$$1 \text{ hPa} = 1 \text{ millibar}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atmosphère standard } P_0 = 101\,325 \text{ Pa} = 1013,25 \text{ hPa}$$

$$\text{En technique : } 1 \text{ bar} \approx 1 \text{ atmosphère} \approx 1 \text{ kgf/cm}^2$$

4.2.4 Poussée d'Archimède

Considérons une portion quelconque d'un fluide au repos soumis à la gravitation. Cette portion de fluide étant immobile, la somme des forces qui s'exercent sur sa surface est donc nulle. Ces forces sont constituées d'une part par le poids de cette portion de fluide, et d'autre part par la résultante des forces dues à la pression hydrostatique. Donc la résultante des forces dues à la pression est égale à l'opposé du poids. Si l'on remplace la portion fluide par un objet solide de forme identique, il s'ensuit que :

Théorème d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide au repos subit de la part de celui-ci une poussée verticale ascendante égale au poids du fluide déplacé.

4.2.5 Compressibilité d'un liquide

En première approximation, les liquides peuvent être considérés comme incompressibles. Lorsqu'on est amené à tenir compte des effets de la pression sur leur volume, on définit le coefficient de compressibilité comme suit :

$$\kappa = -\frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta P} \quad [\text{Pa}^{-1}] \quad (4.11)$$

Cette définition traduit simplement le fait que la diminution de volume est proportionnelle au volume initial et à l'accroissement de pression appliquée.

$$\Delta V = -\kappa V_0 \Delta P$$

Quelques valeurs :

Liquide à 20°C	κ [Pa ⁻¹]
Eau	4,58·10 ⁻¹⁰
Mercure	4,0·10 ⁻¹⁰
Ethanol	11·10 ⁻¹⁰

4.3 LES GAZ

Comme nous l'avons dit précédemment, la pression d'un gaz se définit de la même manière que pour un liquide. Les gaz sont des fluides compressibles. Ils occupent tout le volume à leur disposition. A température ambiante et à des pressions inférieures à 10 atmosphères, l'expérience montre que la pression d'un gaz est inversement proportionnelle à son volume. C'est la loi de **Boyle-Mariotte** (Boyle, 1662 – Mariotte, 1676).

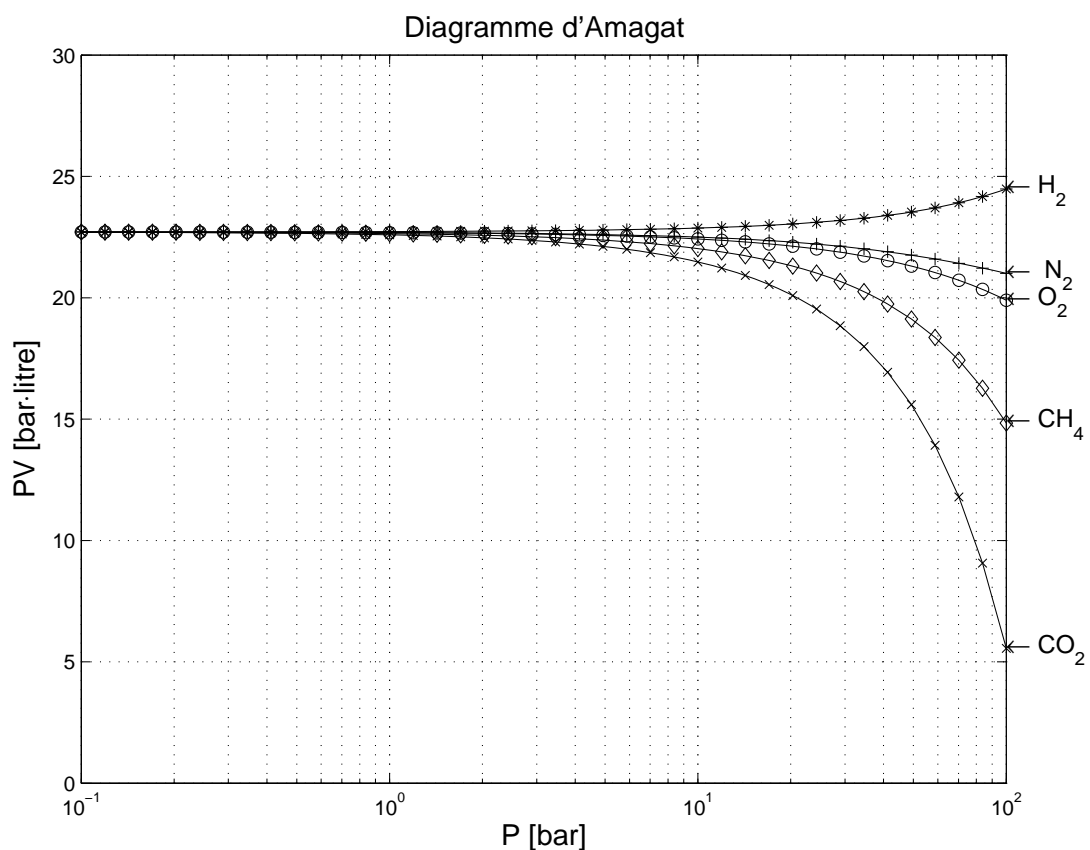
Loi de Boyle-Mariotte

$$PV = Cste$$

[J]

(4.12)

A haute pression (> 10 bars), les gaz réels dévient tous de cette loi, comme le montre la figure ci-dessous.



Pour expliquer le comportement des gaz réels, il faut tenir compte des propriétés des atomes ou molécules qui les composent. Dans la partie du cours traitant de thermodynamique, nous verrons que la « constante » qui intervient dans la loi de Boyle-Mariotte est proportionnelle à la température absolue du gaz et au nombre de molécules contenues dans le volume V . Dans le diagramme ci-dessus, on a considéré le même nombre de molécules de chaque gaz à 20°C.

L'étude des gaz nous amène à définir une nouvelle unité pour caractériser la quantité de matière d'un corps pur formé d'un nombre donné d'atomes ou de molécules.

Déf. La mole est la quantité de matière (masse) d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 12 g de carbone 12.

Le nombre d'atomes dans 12 g de carbone 12 est connu sous le nom de **nombre d'Avogadro**.

Nombre d'Avogadro $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ [mol⁻¹]

La masse de N_A atomes ou molécules d'un corps pur est appelée **masse molaire**.

Exemple : Masse molaire de l'hydrogène (H₂): 2,016 g
Masse molaire de l'oxygène (O₂): 31,999 g

Lorsqu'on exprime que la « constante » dans la loi de Boyle-Mariotte comme étant proportionnelle à la température absolue (T) et au nombre de moles de gaz (n), on obtient l'équation des gaz parfaits.

$$PV = nN_A kT$$

La constante k est la **constante de Boltzmann** : $k = 1,38066 \cdot 10^{-23}$ J·K⁻¹

Le produit $R = N_A k$ est connu sous le nom de **constante des gaz parfaits**.

$$R = 8,31451 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Equation des gaz parfaits $PV = nRT$ [J] (4.13)

La masse du gaz vaut $m = nM$, où M est la masse molaire et n le nombre de moles.

Dans une enceinte de volume donné, la masse volumique du gaz est proportionnelle à sa pression.

En effet, de $PV = \frac{m}{M} RT$ on tire $\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{RT} P$

La température qui intervient dans les équations ci-dessus est la température absolue.

Température absolue $T [\text{kelvin}] = \theta [^\circ\text{C}] + 273,15$ (4.14)

4.3.1 Coefficient de compressibilité d'un gaz parfait

En partant la définition (5.11) et en tenant compte de (5.13), on obtient :

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta P} = -\frac{1}{V} \frac{\Delta \left(\frac{nRT}{P} \right)}{\Delta P} = -\frac{1}{V} \frac{-\frac{nRT}{P^2} \Delta P}{\Delta P} = \frac{nRT}{P^2 V} = \frac{1}{P}$$

Ainsi, dans le cas d'un gaz parfait, le coefficient de compressibilité est égal à l'inverse de la pression. (Comme nous avons fait abstraction de la température, que nous supposons constante, il faut préciser, en toute rigueur, qu'il s'agit du coefficient de compressibilité isotherme.)

4.3.2 Variation de la pression d'un gaz selon la hauteur

Dans le cas d'un liquide incompressible soumis à la gravitation, nous avons vu au § 4.2.2 que la pression en fonction de la hauteur est donnée par ρgh , où ρ est la masse volumique du liquide et $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Dans le cas d'un gaz, il faut tenir compte de la diminution de ρ avec la hauteur dès que celle-ci dépasse quelques mètres.

Pour une petite différence de hauteur Δh , on a :

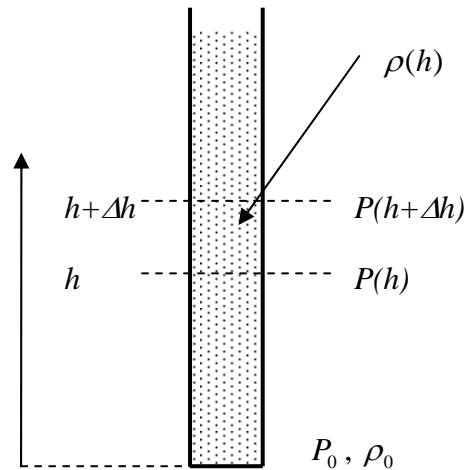
$$P(h) = \rho g \Delta h + P(h + \Delta h)$$

Mais la masse volumique ρ est proportionnelle

à la pression : $\rho = \frac{\rho_0}{P_0} P$

Combinant ces deux relations, il vient :

$$p(h + \Delta h) - p(h) = -\frac{\rho_0}{P_0} P g \Delta h$$



En divisant par Δh et en passant à la limite $\Delta h \rightarrow 0$ on voit apparaître la dérivée de la pression dans le membre de droite.

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{\rho_0}{P_0} P g$$

Cette équation différentielle se résout en multipliant chaque membre par dh/P et en intégrant :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g dh$$

$$\ln P = -\frac{\rho_0}{P_0} gh + Cste$$

En $h = 0$, $P = P_0$, donc la constante d'intégration vaut $\ln P_0$. Finalement :

$$P(h) = P_0 \exp\left(-\frac{\rho_0}{P_0} gh\right) \quad [\text{Pa}] \quad (4.15)$$

Cette formule est valable pour une colonne de gaz de température constante. Cette condition n'est pas tout à fait vérifiée en ce qui concerne l'atmosphère terrestre. Néanmoins, on peut l'utiliser pour estimer la variation de pression avec l'altitude. Calculons encore l'altitude à laquelle la pression vaut la moitié de celle mesurée au sol.

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{\rho_0}{P_0} gh} \rightarrow -\ln 2 = -\frac{\rho_0}{P_0} gh \rightarrow h = (\ln 2) \frac{P_0}{\rho_0 g} = 0,6931 \frac{101325}{(1,293)(9,81)} \cong 5500 \text{ m}$$

4.3.3 Mélanges de gaz

En pratique on a souvent à faire à des mélanges de gaz différents. L'air atmosphérique est par exemple constitué d'environ 1/5 d'oxygène et 4/5 d'azote. Se pose alors la question du calcul de la masse molaire moyenne lorsqu'on veut utiliser l'équation des gaz parfaits.

Loi de Dalton

Si l'on mélange plusieurs échantillons de gaz entre lesquels ne se produit aucune réaction chimique, chacun d'eux se répartit uniformément dans tout le volume à disposition. La pression du mélange est égale à la somme des pressions qu'aurait chacun d'eux s'il occupait tout le volume disponible.

Soit p_1, p_2, p_3, \dots et v_1, v_2, v_3, \dots les pressions et volumes des échantillons de gaz avant qu'on les mélange dans un récipient de volume V préalablement vidé. La pression qu'aurait chaque gaz, supposé parfait, s'il occupait tout le volume serait :

$$p'_1 = \frac{p_1 v_1}{V}, \quad p'_2 = \frac{p_2 v_2}{V}, \quad p'_3 = \frac{p_3 v_3}{V}, \dots$$

Loi de Dalton :
$$P = p'_1 + p'_2 + p'_3 + \dots = \frac{p_1 v_1}{V} + \frac{p_2 v_2}{V} + \frac{p_3 v_3}{V} + \dots$$

Donc :
$$PV = p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 + \dots = \sum p_i v_i$$

Le produit PV d'un mélange est égal à la somme des produits $p_i v_i$ des gaz qui le constituent.

Chaque gaz obéissant à une équation des gaz parfait, on a : $p'_i V = p_i v_i = n_i RT$

où n_i est le nombre de moles du $i^{\text{ème}}$ gaz.

Le mélange obéit à l'équation $PV = nRT$ avec $n = \sum n_i$.

Le quotient $\frac{n_i}{n} = \frac{p'_i}{P}$ est la **fraction molaire** du $i^{\text{ème}}$ gaz. Elle s'exprime généralement en %.

Pour chaque gaz on a par définition $m_i = n_i M_i$ où M_i est la masse molaire.

La masse totale du mélange est :

$$m = \sum m_i$$

$$nM = \sum n_i M_i$$

En divisant par n , on a en définitive :

Masse⁹ molaire d'un mélange

$$M = \sum \frac{n_i}{n} M_i = \sum \frac{p'_i}{P} M_i$$

[kg/mol] (4.16)

Attention : ne pas confondre la fraction molaire avec le quotient $\frac{m_i}{m}$ qui est la **fraction massique** du $i^{\text{ème}}$ gaz.

⁹ Dans les tables, la masse molaire est souvent donnée en g/mol. Donc, multiplier par 1000 pour travailler en unités du SI.

Exemple 1 – Masse molaire de l'air sec

Appliquons la formule (4.16) avec les valeurs suivantes :

Constituant		Fraction molaire [%]	Masse molaire [g/mol]
Azote	N ₂	78,084	28,0134
Oxygène	O ₂	20,9476	31,9988
Argon	Ar	0,934	39,948
Dioxyde de carbone	CO ₂	0,0380	44,01
Néon	Ne	0,001818	20,183
Méthane	CH ₄	0,00020	16,043
Hélium	He	0,000524	4,0026
Krypton	Kr	0,000114	83,8
Hydrogène	H ₂	0,00005	2,016
Xénon	Xe	0,0000087	131,3
Air		100,00	28,966

Table 1 – Composition de l'air

Source : CRC Handbook of Chemistry and Physics, 2001.

La concentration de CO₂ augmente actuellement d'environ 1,65 ppm par année à cause de l'utilisation des énergies fossiles. En 2006, elle était en moyenne de 380 ppm.

Fraction volumique

Considérons une autre manière de mélanger n gaz. Soit $v'_1, v'_2, v'_3 \dots$ les volumes de gaz à pression P et température T avant qu'on les mélange. Soit V le volume du mélange, toujours à pression P et température T .

Pour chaque gaz, on a initialement $Pv'_i = n_iRT$ et finalement : $PV = nRT$

En divisant membre à membre, on a donc : $\frac{v'_i}{V} = \frac{n_i}{n}$

Pour cette raison la fraction molaire est aussi appelée fraction volumique (% mol = % vol).

Exemple 2 – Masse molaire de l'air humide

Pour l'air humide, il faut tenir compte de la pression de vapeur saturante, qui dépend de la température. (Voir par exemple table CRM, p. 175.)

Exemple de calcul pour 20°C et 70% d'humidité relative (HR), à pression normale :

Pression de vapeur saturante à 20°C : 2338 Pa

Pression partielle de la vapeur d'eau à 70% HR : $2338 \cdot (0,7) = 1636,6$ Pa

Pression partielle d'air : $101\,325 - 1636,6 = 99\,688,4$ Pa

Masse molaire de l'eau : 18,015 g/mol

Masse molaire de l'air sec : 28,966 g/mol

Masse molaire de l'air humide (d'après l'éq. 4.16) :

$$M = \sum \frac{p'_i}{P} M_i = \frac{1636,6}{101325} 18,015 + \frac{99688,4}{101325} 28,966 = 28,789 \text{ g/mol}$$

°C	P _{sat} [Pa]	10%	25%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
0	611	28.959	28.949	28.933	28.926	28.920	28.913	28.907	28.900
10	1228	28.953	28.933	28.900	28.886	28.873	28.860	28.847	28.833
20	2338	28.941	28.903	28.840	28.814	28.789	28.764	28.739	28.713
30	4243	28.920	28.851	28.737	28.691	28.645	28.599	28.553	28.507
40	7375	28.886	28.767	28.567	28.488	28.408	28.328	28.249	28.169
50	12334	28.833	28.633	28.299	28.166	28.033	27.900	27.766	27.633
60	19916	28.751	28.428	27.890	27.675	27.459	27.244	27.029	26.814
70	31357	28.627	28.119	27.271	26.933	26.594	26.255	25.916	25.577
80	47343	28.454	27.687	26.408	25.896	25.384	24.873	24.361	23.849
90	70096	28.208	27.072	25.178	24.421	23.663	22.905	22.148	21.390
100	101325	27.871	26.228	23.491	22.395	21.300	20.205	19.110	18.015

Table 2 – Masse molaire de l'air humide(g/mol)
en fonction de la température et de l'humidité relative