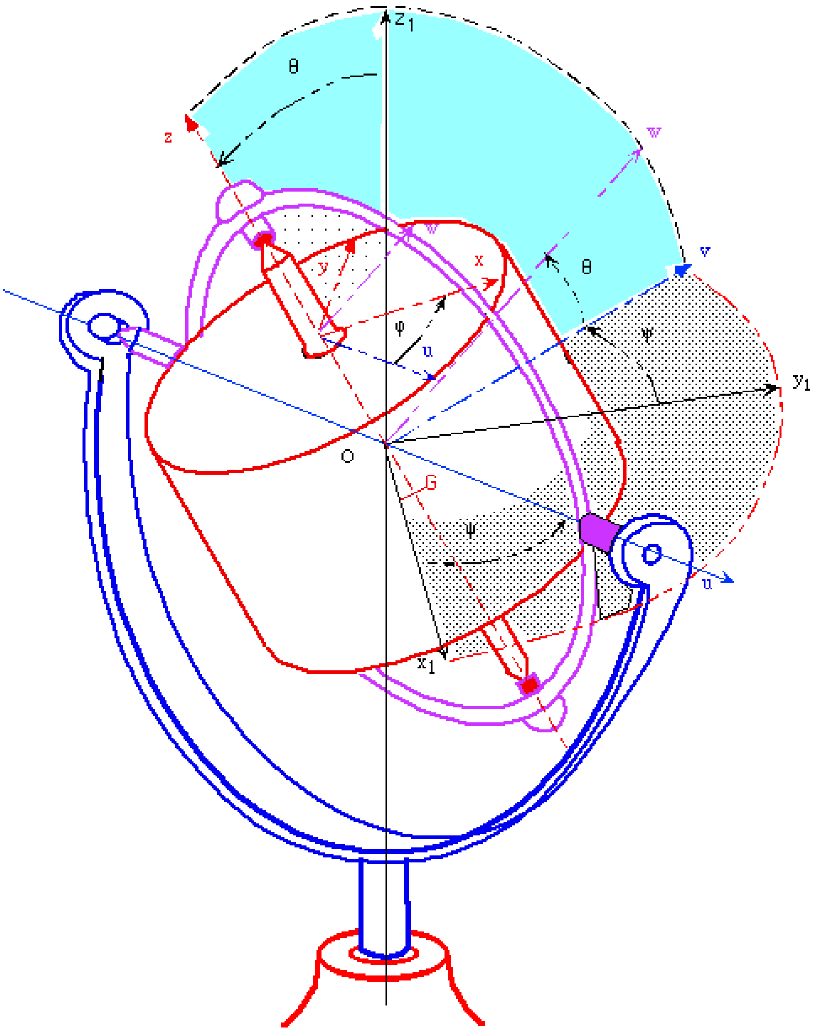
ÉLÉMENTS
DE
MÉCANIQUE
DES SOLIDES INDÉFORMABLES



Gérard HÉNON
Année 2004

Table des matières

Chapitre 1

CALCUL VECTORIEL

1.1 Généralités

On appelle $\mathcal{A}$ l'espace ponctuel affine habituel de la géométrie euclidienne et E l'espace vectoriel associé, en fait $\Re^3$. Dans cet espace vectoriel, relativement à une base $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ formée de trois vecteurs linéairement indépendants, un vecteur $\vec{v}$ sera défini par ses trois composantes v_1, v_2, v_3 qui seront soit mises en colonne en précisant la base de projection, s'il y en a plusieurs, sous la forme suivante : $\frac{\vec{v}}{b} = \left\{ \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right.$ ou sous la forme $\vec{v} = \sum_{i=1}^{i=3} v_i \vec{e}_i = \sum_i v_i \vec{e}_i$.

On utilisera la plupart du temps la convention d'Einstein de sommation de l'indice doublé dans un monôme et donc on écrira :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{i=3} v_i \vec{e}_i = v_i \vec{e}_i$$

Un repère R de $\mathcal{A}$ est le couple (O, b) formé d'un point O de $\mathcal{A}$ et d'une base b de E. Les coordonnées d'un point P de $\mathcal{A}$ dans le repère R sont les composantes dans la base b du vecteur $\overrightarrow{OP}$.

1.2 Produit scalaire

Définition 1 (Forme linéaire) Une forme linéaire l sur E est une application linéaire de E dans $\Re$ qui à un vecteur $\vec{v}$ fait correspondre un réel $l(\vec{v})$, application telle que : $l(\vec{x} + \vec{y}) = l(\vec{x}) + l(\vec{y})$ et $l(\lambda \vec{x}) = \lambda l(\vec{x})$.

Définition 2 (Forme bilinéaire) Une forme bilinéaire φ sur E est une application de $E \times E$ dans $\Re$, qui à deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ associe un nombre réel $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$, application linéaire par rapport à chacun des arguments $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

Définition 3 (Produit scalaire) Le produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique telle que la forme quadratique associée soit définie positive.

notation : $\vec{x}, \vec{y} \longrightarrow \vec{x}.\vec{y}$;
Symétrie du produit scalaire : $\vec{x}.\vec{y} = \vec{y}.\vec{x}$

Remarque 1 (Forme quadratique) La forme quadratique associée est l'application qui à un vecteur $\vec{x}$ fait correspondre son produit scalaire par lui-même, soit $\vec{x}.\vec{x}$.

* Forme quadratique définie : $\vec{x} \cdot \vec{x}$ ne s'annule que pour $\vec{x}$ nul.
* Forme quadratique positive : $\vec{x} \cdot \vec{x}$ est strictement positive pour $\vec{x}$ non nul.

Remarque 2 (Norme) On appelle norme d'un vecteur $\vec{x}$, notée $\|\vec{x}\|$, la racine carrée de $\vec{x}.\vec{x}$.

Remarque 3 (Orthogonalité) Deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Notation : $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Conventions "physiques" relatives au produit scalaire : ce dernier est tel que

Si A,B,C et D sont des points distincts de $\mathcal{A}$:
* $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\|$ si et seulement si les distances AB et CD sont égales ;
* $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ si et seulement si les droites AB et CD sont perpendiculaires.

Définition 4 (Base orthonormée) Une base est dite orthonormée si les vecteurs de base vérifient : $\vec{e}_i.\vec{e}_j = \delta_{ij}$ avec $\delta_{ij} = 1$ si i = j, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Dans la suite du cours, on n'utilisera que des bases orthonormées.
En base orthonormée,
* $\vec{x}.\vec{y} = x_i y_i$
* $\vec{x}.\vec{e}_i = x_i$
* $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=3} x_i^2}$.

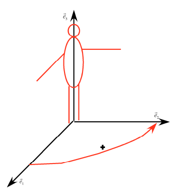
Remarque 4 : $\vec{x}.\vec{y} = \|\vec{x}\| \; \|\vec{y}\| \cos(\vec{x}, \vec{y})$

1.3 Produit mixte

Définition 5 (Produit mixte) C'est le déterminant (forme trilinéaire alternée (antisymétrique)) relatif à une base orthonormée choisie positive.

- Notation du produit mixte des vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$: $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
- Base orthonormée positive : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = +1$
- Expression analytique : Dans une base orthonormée positive $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, en posant $\varepsilon_{ijk} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$, l'expression du produit mixte de trois vecteurs est : $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \varepsilon_{ijk} x_i y_j z_k$.
  Remarque : $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$
- Le produit mixte de trois vecteurs change de signe si on permute deux vecteurs.
- il ne change pas si on effectue une permutation circulaire de ces vecteurs.

Orientation de la base



L'orientation prise pour la base orthonormée est telle que pour un observateur disposé suivant $\vec{e}_3$, le passage de $\vec{e}_1$ à $\vec{e}_2$ se fait de droite à gauche.

1.4 Produit vectoriel

Définition 6 (Produit vectoriel) On appelle produit vectoriel de $\vec{x}$ par $\vec{y}$ le vecteur noté $\vec{x} \wedge \vec{y}$ défini par l'égalité :

$$\forall \vec{z}, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x} \wedge \vec{y}) . \vec{z}$$

Quelques propriétés :

* Expression des composantes : $(\vec{x} \wedge \vec{y})_i = \varepsilon_{ijk} x_j y_k$

* Le produit vectoriel est antisymétrique : $\vec{x} \wedge \vec{y} =$ - $\vec{y} \wedge \vec{x}$

* Le produit vectoriel est linéaire par rapport à chacun de ses arguments.

* Le produit vectoriel $\vec{x} \wedge \vec{y}$ est orthogonal à $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

* Dans l'ordre $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{x} \wedge \vec{y}$ sont orientés comme la base.

* $\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \; \|\vec{y}\| \; |\sin(\vec{x}, \vec{y})|$

Double produit vectoriel :

$$(\vec{x} \wedge \vec{y}) \wedge \vec{z} = (\vec{x}.\vec{z})\,\vec{y} - (\vec{y}.\vec{z})\,\vec{x}.$$

Division vectorielle : Étant donnés les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, trouver un vecteur $\vec{x}$

tel que $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$

* Si $\vec{a}$ est nul, soit tout $\vec{x}$ est solution si $\vec{b}$ est nul, soit il n'y a pas de solution si $\vec{b}$ n'est pas nul.

* Si $\vec{a}$ n'est pas nul, les propriétés géométriques du produit vectoriel entraînent :
  – condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution : $\vec{a}.\vec{b} = 0$
  – la solution n'est pas unique, elle est définie à un vecteur colinéaire à $\vec{a}$ près.

On peut donc chercher une solution particulière de la forme $\mu\vec{a} \wedge \vec{b}$ et on obtient la solution générale :

$$\vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} + \mu\vec{a} \text{ avec } \mu \in \Re.$$

Chapitre 2

TORSEURS

2.1 Torseurs et champs antisymétriques

Définition 7 (Application antisymétrique) Une application l de E dans E est dite antisymétrique si $\forall \vec{x}$ et $\forall \vec{y}$, on a : $\vec{x}.l\,(\vec{y})$ = - $\vec{y}.l\,(\vec{x})$

Proposition 1 (Propriété caractéristique) Une application l antisymétrique est une application linéaire telle que

$$\forall \vec{x}, \vec{x}.l(\vec{x}) = 0$$

Proposition 2 (Matrice d'une application antisymétrique) La matrice $\mathcal{L}$ de l'application antisymétrique l relative à une base orthonormée directe b est antisymétrique.

Si on note l_{ij} le terme générique de la matrice, ligne i et colonne j, composante i du transformé de $\vec{e}_j$, on a $l_{ij} = \vec{e}_i.l(\vec{e}_j)$ = - $\vec{e}_j.l(\vec{e}_i)$ = - l_{ji}.

Proposition 3 (Vecteur associé) Si l est une application antisymétrique, il existe $\vec{R}$ tel que

$$\forall \vec{x}, l(\vec{x}) = \vec{R} \wedge \vec{x}$$

Définition 8 (Champ antisymétrique) Un champ antisymétrique $\vec{h}$ est une application de $\mathcal{A}$ dans E telle qu'il existe un point O de $\mathcal{A}$ et une application antisymétrique l vérifiant :

$$\vec{h}(P) = \vec{h}(O) + l\left(\overrightarrow{OP}\right)$$

Remarque 5 Si A et B sont deux points de $\mathcal{A}$, on a également :

$$\vec{h}(B) = \vec{h}(A) + l\left(\overrightarrow{AB}\right)$$

Corollaire 1 Un champ antisymétrique $\vec{h}$ est une application de $\mathcal{A}$ dans E telle qu'il existe un point O de $\mathcal{A}$ et un vecteur $\vec{R}$ de E vérifiant :

$$\vec{h}(P) = \vec{h}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$$

Définition 9 (Champ équiprojectif) Un champ équiprojectif $\vec{h}$ est une application de $\mathcal{A}$ dans E vérifiant : $\forall A, \forall B$ de $\mathcal{A}$,

$$\left(\vec{h}(B) - \vec{h}(A)\right).\overrightarrow{AB} = 0$$

Proposition 4 (Propriété caractéristique) Un champ antisymétrique est un champ équiprojectif et réciproquement

* Si $\vec{h}$ est un champ antisymétrique, l l'application antisymétrique associée, la linéarité de l permet d'écrire $\forall A, \forall B$ de $\mathcal{A}$,

  $$\left(\vec{h}(B) - \vec{h}(A)\right) = l(\overrightarrow{AB})$$

  et l'antisymétrie de l entraîne le résultat.
* Réciproquement, l'équiprojectivité d'un champ h permet, à partir d'un point O de $\mathcal{A}$ d'écrire :

  $$\left(\left(\vec{h}(B) - \vec{h}(O)\right) - \left(\vec{h}(A) - \vec{h}(O)\right)\right).\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$$

  On définit alors l'application l antisymétrique comme l'application qui, à tout vecteur $\overrightarrow{OP}$ fait correspondre $l\left(\overrightarrow{OP}\right) = \vec{h}(P)$ - $\vec{h}(O)$

Définition 10 On appelle torseur, noté : $[T]$, l'ensemble d'un champ antisymétrique $\vec{h}$ et du vecteur $\vec{R}$ associé.

Pour être en accord avec les définitions historiques des torseurs et pour unifier le vocabulaire, on appellera résultante du torseur ce vecteur $\vec{R}$ et moment en P du torseur la valeur du champ $\vec{h}$ en ce point. On écrira : $\vec{h}(A) = \vec{\mathcal{M}}_A[T]$

2.2 Torseurs et vecteurs liés ou glissants

Définition 11 (Vecteur lié) On appelle vecteur lié le couple (non ordonné) noté $(P, \vec{v})$ ou $(\vec{v}, P)$ formé d'un vecteur $\vec{v}$ de E et d'un point P de $\mathcal{A}$.

Le vecteur $\vec{v}$ est dit vecteur libre du vecteur lié, la droite d définie par le point P et le vecteur $\vec{v}$ est dite support du vecteur lié.

Définition 12 (Vecteur glissant) On appelle vecteur glissant le couple (non ordonné) noté $(d, \vec{v})$ ou $(\vec{v}, d)$ formé d'un vecteur $\vec{v}$ de E et d'une droite d de $\mathcal{A}$, de vecteur directeur $\vec{v}$.

Soit la relation $\mathcal{G}$ d'équivalence entre vecteurs liés : deux vecteurs liés sont $\mathcal{G}$-équivalents s'ils ont même vecteur libre et même support. Avec cette relation, un vecteur glissant peut être considéré comme classe d'équivalence de vecteurs liés et on pourra faire apparaître cette interprétation en écrivant : $(\vec{v}, P) \in (\vec{v}, d)$.

Définition 13 (Moment en un point) Le moment en un point O d'un vecteur glissant $(\vec{v}, d)$ ou d'un vecteur lié $(\vec{v}, P) \in (\vec{v}, d)$, (noté pour le vecteur glissant : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O\,(\vec{v}, d)$, et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O\,(\vec{v}, P)$ pour le vecteur lié), est défini par :
$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O\,(\vec{v}, d) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$ avec $M \in d$, avec d support du vecteur lié.

Définition 14 (Moment par rapport à un axe) Le moment par rapport à un axe δ de vecteur unitaire $\vec{u}$ d'un vecteur glissant $(\vec{v}, d)$ ou d'un vecteur lié $(\vec{v}, P) \in (\vec{v}, d)$, noté pour le vecteur glissant :
$\mathcal{M}_\delta\,(\vec{v}, d) = \vec{u}\ .\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_M\,(\vec{v}, d)$ où M est un point de δ

Remarque 6 Une condition nécessaire et suffisante pour que le moment d'un vecteur glissant par rapport à un axe soit nul est que le support du vecteur glissant et l'axe soient coplanaires (c'est-à-dire sécants ou parallèles).

Définition 15 (Éléments de réduction) Si S est un ensemble de vecteurs glissants noté : soit $S = \{(\vec{v}_i, d_i), i = 1$ à $i = n\}$, soit $S = \bigcup_{i=1}^{i=n}(\vec{v}_i, d_i)$, on appelle éléments de réduction du système S en un point O les vecteurs $\vec{R}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(S)$ définis par :

On a des définitions du même genre pour un système de vecteurs liés.

* $\vec{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{v}_i$: Résultante du système S

* $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(S) = \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{\mathcal{M}}_O\,(\vec{v}_i, d_i)$: Moment en O du système S.

Théorème 1 (Transport du moment) La relation entre les moments en deux points A et B s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_B(S) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(S) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Remarque 7 Le moment d'un système de vecteurs glissants est un champ antisymétrique.

On définit également le moment du système S par rapport à un axe δ de vecteur unitaire $\vec{u}$. On a : $\mathcal{M}_\delta(S) = \sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{M}_\delta(\vec{v}_i, d_i) = \vec{u} \, . \, \overrightarrow{\mathcal{M}}_M(S)$ où M est un point de δ.

Définition 16 (Systèmes équivalents) Deux systèmes sont $\mathcal{T}$-équivalents s'ils ont mêmes éléments de réduction en tout point

Théorème 2 (C.N.S.1) Une Condition Nécessaire et Suffisante pour que deux systèmes soient $\mathcal{T}$-équivalents est qu'ils aient mêmes éléments de réduction en un point

Théorème 3 (C.N.S.2) Une Condition Nécessaire et Suffisante pour que deux systèmes soient $\mathcal{T}$-équivalents est qu'ils aient mêmes moments en trois points non alignés.

Définition 17 (Torseur d'un système) On appelle torseur du système S le couple formé du vecteur $\vec{R}$ et de l'application qui à un point P de $\mathcal{A}$ fait correspondre le moment du système en ce point.

Définition 18 ((Autre présentation) Torseur d'un système) On appelle également torseur du système S la classe d'équivalence du système pour la relation $\mathcal{T}$, classe notée $[S]$

Les éléments de réduction du système sont dits "éléments de réduction" du torseur du système (puisqu'ils le caractérisent) et on note le moment en un point A : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A[S]$. De même le moment du torseur par rapport à un axe sera celui d'un des systèmes de torseur $[S]$.

2.3 Espace desTorseurs

2.3.1 Espace vectoriel des torseurs

À partir de leurs éléments de réduction en un point P, on définit la somme $[T]$ de deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ par :

$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_P[T] = \overrightarrow{\mathcal{M}}_P[T_1] + \overrightarrow{\mathcal{M}}_P[T_2]$$

On définit de même le produit $[T] = \lambda \, [T_1]$ d'un torseur $[T_1]$ par un scalaire λ par :

$\vec{R} = \lambda\ \vec{R}_1$

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_P[T] = \lambda\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_P[T_1]$

L'espace des torseurs a ainsi une structure d'espace vectoriel de dimension 6.

Définition 19 (produit ou comoment) On appelle produit ou comoment de deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$, noté $[T_1].[T_2]$ le scalaire défini par :
$[T_1].[T_2] = \vec{R}_1\ .\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_P[T_2] + \vec{R}_2\ .\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_P[T_1]$

Remarque 8 Cette grandeur est ce qu'on appellera un invariant scalaire des deux torseurs, grandeur indépendante de la position de P.

Définition 20 (Automoment) On appelle automoment ou invariant scalaire du torseur $[T]$ noté $I_s[T]$ le produit scalaire des éléments de réduction en un point :
$2I_s[T] = [T].[T] = 2\ \vec{R}\ .\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_P[T]$

2.3.2 Torseurs particuliers d'invariant scalaire nul

2.3.2.1 Torseur nul

C'est le torseur dont les éléments de réduction sont nuls en tout point (CNS1 : éléments de réduction nuls en un point ; CNS2 : moment nul en trois points non alignés). Un système de vecteurs liés ou glissants de torseur nul est dit équivalent à zéro, exemple : $S = \{(\vec{v}, d), (-\vec{v}, d)\}$

2.3.2.2 Torseur couple

C'est un torseur dont la résultante est nulle. Le moment devient donc un invariant vectoriel, on dit que le moment est uniforme. Exemple de système dont le torseur est un couple : avec $\vec{v}$ non nul, $S = \{(\vec{v}, d_1), (-\vec{v}, d_2)\}$, $d_1 \neq d_2$.

2.3.2.3 Torseur glisseur

On a les définitions équivalentes :
* torseur nul ou d'invariant scalaire nul avec résultante non nulle
* torseur pour lequel il existe un point K où le moment du torseur est nul
* torseur d'un vecteur glissant $(\vec{R}, \Delta)$

Le support Δ du vecteur glissant de torseur $[T]$ est dit axe central du glisseur.

Proposition 5 (Propriété caractéristique) l'axe central du glisseur est l'ensemble des points où le moment du glisseur est nul.

2.3.3 Torseurs d'invariant scalaire non nul

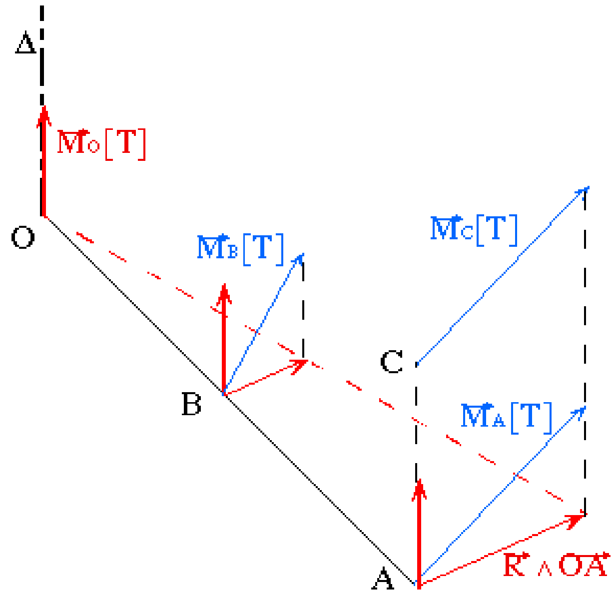
Soit $[T]$ un torseur d'éléments de réduction en un point O : $\vec{R}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O[T]$. On peut faire une décomposition qu'on peut qualifier de locale de ce torseur en un couple $[C_O]$ de moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O[T]$ et un glisseur $[G_O]$ de résultante $\vec{R}$ et de moment nul en O.

On peut également effectuer la décomposition canonique en un glisseur $[G]$ et un couple $[C]$ de moment colinéaire à $\vec{R}$. L'axe central Δ du glisseur $[G]$ est aussi appelé axe central du torseur $[T]$.

Proposition 6 (Propriété caractéristique 1) l'axe central du torseur $[T]$ est l'ensemble des points où ce torseur a un moment colinéaire à sa résultante.

Proposition 7 (Propriété caractéristique 2) l'axe central du torseur $[T]$ est l'ensemble des points où le moment de ce torseur a un module minimum.

Répartition des moments autour de l'axe central



* Le moment d'un torseur est constant le long d'une parallèle à l'axe central.
* Les lignes de champ du moment d'un torseur sont des hélices circulaires d'axe l'axe central ($\mathcal{L}$ est ligne de champ si la tangente en chaque point de $\mathcal{L}$ admet comme vecteur directeur le moment du torseur en ce point).
* Le champ de moment est globalement invariant par rotation autour de l'axe central.

Chapitre 3

STATIQUE

3.1 Généralités

La statique est l'étude des équilibres (états de repos) des systèmes matériels, ensembles fermés de particules. On appellera fractionnement d'un système matériel S sa partition matérielle en sous-systèmes S_i , fractionnement noté : $S = \{S_i, i = 1 \text{ à } n\}$ ou $S = \bigcup_{i=1}^{i=n} S_i$. L'Univers sera noté $\mathcal{U}$, l'extérieur d'un système matériel $\mathcal{U} - S$.

L'expérience montre que dans l'étude de l'équilibre d'un système S_1, il n'est besoin de considérer que quelques systèmes extérieurs à S_1 qui forment un environnement qu'on peut qualifier de "local". La prise en compte d'un système S_2 de l'extérieur $\mathcal{U} - S_1$ de S_1 se traduira par la définition d'une distribution de vecteurs liés aux particules de S_1, vecteurs liés dits forces exercées par S_2 sur S_1.

On utilisera chaque fois que c'est possible les notations suivantes : $\mathcal{F}_{21}$ pour l'ensemble des forces exercées par S_2 sur S_1, $[\mathcal{F}_{21}]$ pour le torseur de cet ensemble, $\vec{F}_{21}$ sa résultante et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{P21}$ son moment en un point P.

3.2 Distributions de forces

3.2.0.1 Distribution discrète

Les forces sont liées à un nombre fini de particules P_i du système S_1 :

$\mathcal{F}_{21} = \bigcup_{i=1}^{i=n} \left(\vec{F}_i, P_i\right)$. Le torseur de ces forces sera alors défini par ses éléments de réduction :

* $\vec{F}_{21}=\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i$ de dimension MLT^{-2}, soit le produit d'une masse par une accélération, exprimée en Newton (N).

* $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{P21} = \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{\mathcal{M}}_P(\vec{F}_i, P_i)$ de dimension $LMLT^{-2}$, exprimée en mètre-newton (mN).

3.2.0.2 Distributions continues (ou à densité)

* À densité massique : $\vec{f}$ de dimension LT^{-2} en Newton par kg ou en ms^{-2}, dimension d'une accélération. On peut considérer que sur une particule élémentaire de S_1 de masse $dm(P)$ située en P s'exerce la force élémentaire $\left(P, \vec{f}(P)dm(P)\right)$. Dans ce cas, la résultante s'écrit :
  $\vec{F}_{21} = \int_{S_1} \vec{f}(P)dm(P)$
  et le moment en un point O :
  $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O21} = \int_{S_1} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}(P)dm(P)$
* À densité surfacique : $\vec{f}$ de dimension $ML^{-1}T^{-2}$ exprimée en Newton par mètre carré ou Pascal (P). Les forces sont réparties sur une partie de S_1 assimilable à une surface Σ_1. Si on note $d\sigma(P)$ l'élément d'aire en P, la résultante s'écrit :
  $\vec{F}_{21} = \int_{S_1} \vec{f}(P)d\sigma(P)$
  et le moment en un point O :
  $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O21} = \int_{S_1} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}(P)d\sigma(P)$
* À densité linéique : $\vec{f}$ de dimension MT^{-2} exprimée en Newton par mètre. Les forces sont réparties sur une partie de S_1 assimilable à une courbe Γ_1. Si on note $dl(P)$ l'élément de longueur en P, la résultante s'écrit :
  $\vec{F}_{21} = \int_{\Gamma_1} \vec{f}(P)dl(P)$
  et le moment en un point O :
  $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O21} = \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}(P)dl(P)$

3.3 Classifications des forces

Pour faire le bilan des forces exercées sur un système S_1, on utilisera les classifications suivantes :

3.3.1 Forces intérieures et forces extérieures

Les forces intérieures à S_1 sont les forces exercées par une partie de S_1 sur une autre partie de S_1, ce qui suppose donc un fractionnement de S_1. Les forces extérieures à S_1 sont exercées par une partie de $\mathcal{U} - S_1$ sur une partie de S_1.

3.3.2 Forces à distance et forces de contact

Les forces à distance seront les forces de gravitation et les forces électro-magnétiques. Les forces de contact seront réparties sur les frontières où le systèmes S_1 a des particules en contact avec des particules de $\mathcal{U} - S_1$, ces frontières pouvant être des points, des courbes ou des surfaces.

3.3.3 Forces connues et forces inconnues

3.3.4 Forces données et forces non données (de liaison)

Les forces données sont des forces dont l'expresion est connue en fonction de la position du système.

3.4 Forces de pesanteur

C'est, pour un système S_1, la traduction de l'existence de la Terre dans $\mathcal{U}-S_1$, faisant intervenir les forces de gravitation et le mouvement de la Terre par rapport à un repère "galiléen". Elle s'exprime par une densité massique $\vec{g}$, accélération de la pesanteur, qu'on supposera indépendante de la position. Dans cette hypothèse, si on appelle G le centre d'inertie de S_1, l'ensemble des forces de pesanteur est équivalent à un vecteur lié $(G, m\vec{g})$ où m est la masse du système S_1. Ce centre d'inertie est alors dit : centre de gravité de S_1.

Rappel : le centre d'inertie G (ou centre de masse) est défini par :

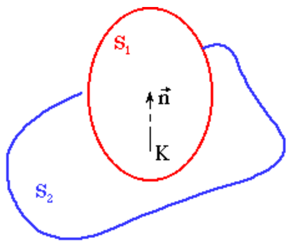
$$m\overrightarrow{OG} = \int_{S_1} \overrightarrow{OP} dm(P)$$

ou

$$\int_{S_1} \overrightarrow{GP} dm(P) = 0$$

3.5 Contacts entre solides. Frottement

3.5.1 Contact ponctuel



Le contact rigoureusement ponctuel est caractérisé par le fait qu'on peut, avec une bonne approximation, admettre que l'ensemble $\mathcal{F}_{21}$ des forces exercées par le solide S_2 sur le solide S_1 a un moment nul au point (géométrique) de contact K. Cet ensemble de forces est donc équivalent à une force $\vec{F}_{21}$ exercée sur la particule de S_1 qui se trouve en K, force dite : réaction en K de S_2 sur S_1.

On pose $\vec{F}_{21} = N_{21}\vec{n} + \vec{T}_{21}$ où $\vec{n}$ est la normale unitaire au plan tangent commun aux deux solides en K, orientée vers S_1, $\vec{T}_{21}$ étant la réaction tangentielle, orthogonale à cette normale, $N_{21}\vec{n}$ représentant la réaction normale. La condition dite sthénique ou dynamique de contact unilatéral est que $N_{21} > 0$.

Loi de Coulomb La loi usuelle de frottement (de Coulomb) pour le contact rigoureusement ponctuel est une loi empirique suffisante pour la plupart des contacts entre deux solides : il existe un coefficient f, dit coefficient de frottement (d'adhérence), ne dépendant que de la nature des surfaces et des matériaux en contact tel que : $\|\vec{T}_{21}\| < fN_{21}$.

Quand le frottement est très faible, on suppose négligeable la composante tangentielle $\vec{T}_{21}$, la réaction est alors orthogonale aux surfaces en contact.

Remarque 9 Dans le cas où on ne peut pas négliger le moment en K des forces exercées par le solide S_2 sur le solide S_1, il existe des lois reliant les composantes normale et tangentielle de ce moment à la composante normale N_{21} de la réaction, avec introduction de coefficients de frottement : de pivotement pour la composante normale et de roulement pour la composante tangentielle.

Remarque 10 Quand le contact est linéique ou surfacique, on introduit une densité correspondante de forces de contact :

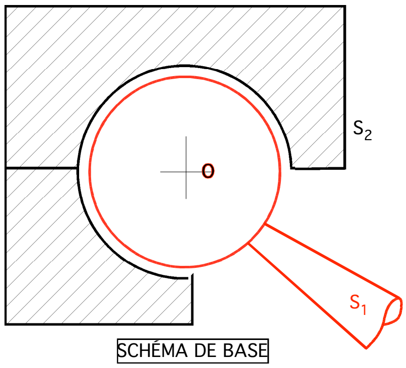
On a alors pour la densité (linéique ou surfacique) $\vec{f}_{21}$:

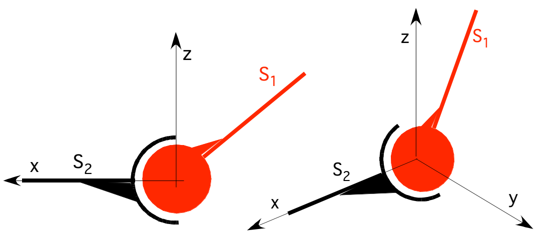
$\vec{f}_{21} = n_{21}\vec{n} + \vec{t}_{21}$ où $\|\vec{t}_{21}\| < fn_{21}$.

3.5.2 Liaisons usuelles sans frottement

Dans quelques liaisons de deux solides S_1 et S_2, des réalisations élémentaires permettent de mettre en évidence les caractéristiques du torseur des efforts exercés par S_2 sur S_1 dans l'hypothèse où il n'y a pas de frottement (liaisons encore dites idéales), caractéristiques qui seront admises par la suite quelle que soit la réalisation de l'articulation. Rappel des notations : $[\mathcal{F}_{21}]$ pour le torseur, $\vec{F}_{21}$ sa résultante de composantes (X_{21}, Y_{21}, Z_{21}) et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{P21}$ son moment en un point P de composantes $(L_{P21}, M_{P21}, N_{P21})$ dans la base orthonormée $b = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ d'un repère local (O, b).

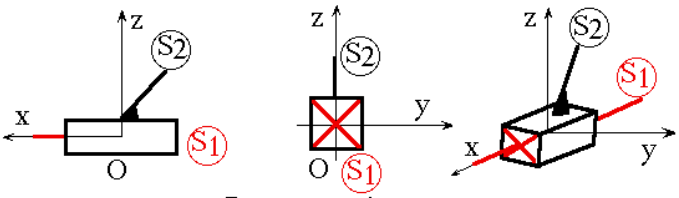
3.5.2.1 Liaison sphérique en un point O



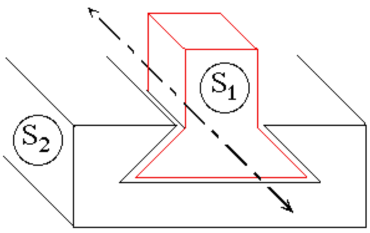


Cette liaison,encore appelée articulation ou liaison rotule, schématisée par deux sphères concentriques, où il existe un point, ici le centre O, fixe par rapport aux deux solides, permet trois degrés de liberté (angulaires ou de rotation). Le contact est surfacique et introduit donc une densité $(P, \vec{f}(P))$ de forces de contact qui, dans le cas du non frottement sont normales aux sphères donc radiales, leur moment en O est donc nul. Liaison idéale : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O [\mathcal{F}_{21}] = 0$ On a donc trois inconnues sthéniques : les composantes (X_{21}, Y_{21}, Z_{21}) de la résultante $\vec{F}_{21}$.

3.5.2.2 Liaison prismatique d'axe $\Delta = Ox$



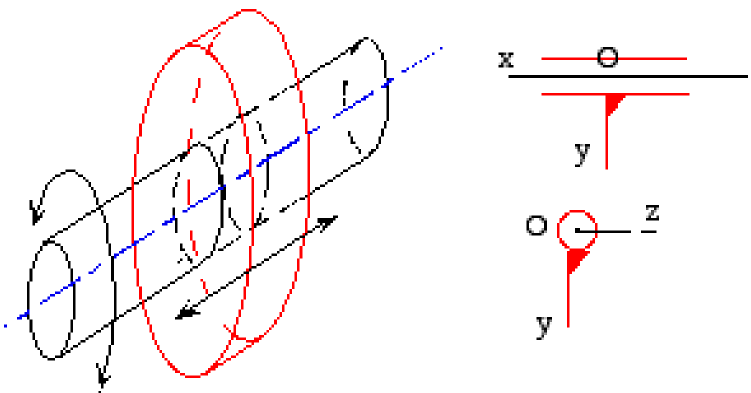
Représentations



Exemple de réalisation

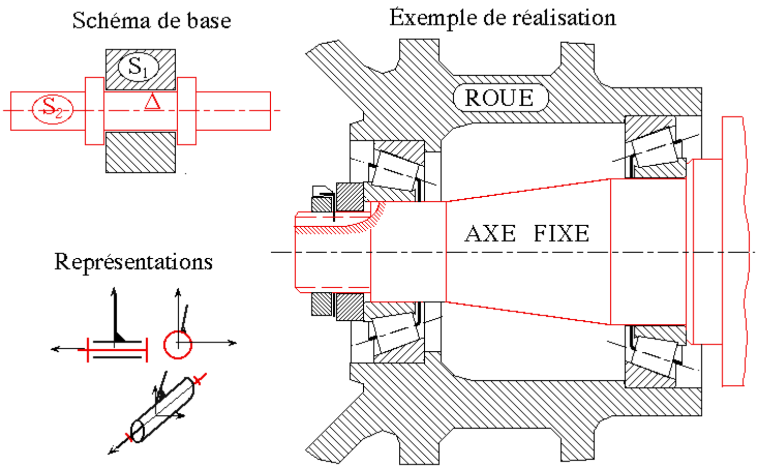
Cette liaison, encore appelée articulation ou liaison glissière, permet un degré de liberté (linéaire) de translation parallèle à Δ. Le contact se fait sur des surfaces prismatiques de génératrices parallèles à Δ, ce qui entraîne que les forces sont orthogonales à cette direction lorsqu'il n'y a pas frottement. Donc dans ce cas, cinq inconnues sthéniques que sont les composantes Y_{21} et Z_{21} de la résultante et les trois composantes du moment en O.

3.5.2.3 Liaison cylindrique d'axe $\Delta = Ox$



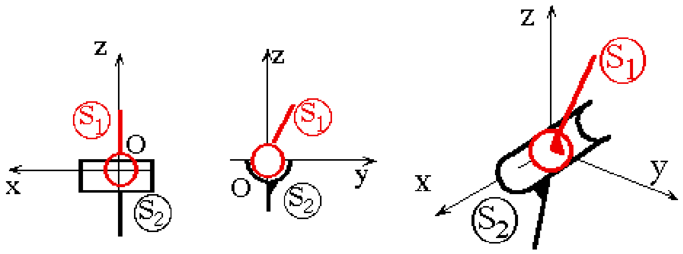
Cette liaison,encore appelée articulation ou liaison pivot glissant ou verrou, permet deux degrés de liberté , l'un angulaire de rotation autour de l'axe Δ, le deuxième linéaire de translation parallèle à Δ). Le contact (voir schéma de base) est surfacique et introduit donc une densité $(P, \vec{f}(P))$ de forces de contact qui, dans le cas du non frottement sont normales aux cylindres de révolution et donc coplanaires à l'axe Δ et orthogonales à cet axe. Liaison idéale : $\mathcal{M}_\Delta[\mathcal{F}_{21}] = 0$ et résultante $\vec{F}_{21}$ orthogonale à Δ. On a ici quatre inconnues sthéniques : deux composantes orthogonales à Δ de la résultante $\vec{F}_{21}$, soit Y_{21} et Z_{21} et deux composantes du moment car on a $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O21}$ de composantes : $(0, M_{O21}, N_{O21})$.

3.5.2.4 Liaison rotoïde d'axe $\Delta = Ox$



Cette liaison,encore appelée articulation ou liaison pivot, permet un degré de liberté (angulaire ou de rotation) autour de l'axe Δ. Le contact (voir schéma de base) est surfacique et introduit donc une densité $(P, \vec{f}(P))$ de forces de contact qui, dans le cas du non frottement sont soit normales aux cylindres de révolution, soit orthogonales aux épaulements donc dans chaque cas coplanaires à l'axe Δ. Liaison idéale : $\mathcal{M}_\Delta[\mathcal{F}_{21}] = 0$ On a ici cinq inconnues sthéniques : les composantes de la résultante et deux composantes du moment car on a $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O21}$ de composantes : $(0, M_{O21}, N_{O21})$.

3.5.2.5 Liaison annulaire curviligne



Dans cette liaison, un point O_1 lié à S_1 est astreint à parcourir une courbe C_2 de S_2, liaison qu'on peut se représenter comme une celle d'une sphère se déplaçant dans un tube, soit quatre degrés de liberté : trois angulaires et un linéaire. Dans les schémas précédents, la courbe est rectiligne (liaison linéique annulaire) Le contact est linéique, le long d'un arc de cercle dans le plan de section droite du tube. Dans le cas du non frottement, ces forces sont orthogonales à la courbe et ont leurs supports qui passent par O_1. D'où les caractéritiques de cette liaison idéale : résultante orthogonale à la courbe en O_1, et moment nul en ce point soit deux inconnues sthéniques.

3.6 Principe Fondamental de la Statique

Dans l'Univers, il existe un repère privilégié dit repère galiléen tel que pour tout système matériel S en équilibre (au repos dans ce repère), le torseur des forces extérieures exercées sur ce système est nul.

Notations : Univers : $\mathcal{U}$, repère galiléen : $\mathcal{R}_g$.

Soit : $\mathcal{PFS}$: $\left[\mathcal{F}_{\mathcal{U}-S/S}\right] = 0$

Ce principe fondamental se traduira par deux équations vectorielles : l'équation dite de résultante, notée ÉDR, $\vec{F}_{\mathcal{U}-S/S} = 0$,

et une équation dite de moment en un point (P par exemple), notée : ÉDM en P : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_P \left[\mathcal{F}_{\mathcal{U}-S/S}\right] = 0$

On utilisera également les six équations scalaires correspondant aux projections de l'équation de résultante sur des directions indépendantes et aux trois équations de moment par rapport à des axes indépendants (non obligatoirement concourants).

Théorème 4 (Action et réaction) Le torseur des forces exercées par un système S_1 sur un système S_2 est opposé au torseur des forces exercées par le système S_2 sur le système S_1

Soit S le système dont S_1 et S_2 forment un fractionnement. L'extérieur de S_1 étant constitué par l'extérieur de S et S_2, celui de S_2 par l'extérieur de S et S_1, l'application successive du principe fondamental à S_1 , S_2 et S donne les équations suivantes :

$\left[\mathcal{F}_{\mathcal{U}-S/S_1}\right] + \left[\mathcal{F}_{S_2/S_1}\right] = 0$
$\left[\mathcal{F}_{\mathcal{U}-S/S_2}\right] + \left[\mathcal{F}_{S_1/S_2}\right] = 0$
$\left[\mathcal{F}_{\mathcal{U}-S/S_1}\right] + \left[\mathcal{F}_{\mathcal{U}-S/S_2}\right] = 0$

D'où on tire immédiatement la conclusion du théorème,

$\left[\mathcal{F}_{S_1/S_2}\right] =$ - $\left[\mathcal{F}_{S_2/S_1}\right]$

Remarque 11 On peut également en déduire que pour tout fractionnement d'un système, le torseur de l'ensemble des forces intérieures au système est nul.

En effet, pour tout fractionnement $S = \bigcup_{i=1}^{i=n}$, on a :

$\left[\mathcal{F}_{S_i/S-S_i}\right] + \left[\mathcal{F}_{S-S_i/S_i}\right] = 0$

Chapitre 4

CINÉMATIQUE

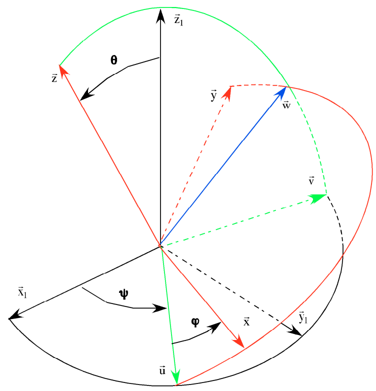
4.1 Angles d'Euler

Soit $R_1 = (O_1, b_1)$ un repère pris comme référence, repère dit fixe et R=(O, b) un repère dit mobile, c'est-à-dire mobile par rapport à R_1. Les bases de ces repères sont $b_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ pour R_1 et $b = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ pour R.

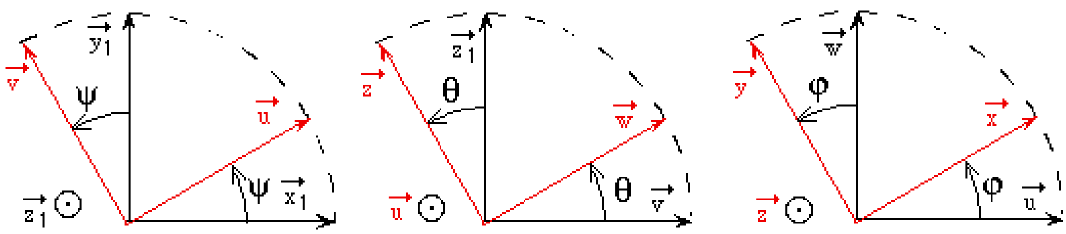
La position de R par rapport à R_1 pourrait être définie par les coordonnées X_1, Y_1, Z_1 dans R_1 de son origine O et les composantes dans b_1 des vecteurs unitaires de b, soit douze paramètres reliés pour les composantes des vecteurs de b par les six relations traduisant que b est orthonormée. On peut remplacer ces composantes par les angles d'Euler de la base b par rapport à b_1, dits également par extension angles d'Euler du repère R par rapport au repère R_1, et définis comme suit :

On choisit deux directions privilégiées (pour le problème étudié) : l'une liée à b_1 (constante dans cette base) soit ici $\vec{z}_1$, l'autre liée à b soit $\vec{z}$. Un vecteur unitaire $\vec{u}$ est défini orthogonal à ces deux directions et orienté arbitrairement. Les angles d'Euler sont les angles orientés ψ, θ, φ définis par :

* ψ (psi) $= (\vec{x}_1, \vec{u})$ mesuré autour de $\vec{z}_1$: angle de "précession"
* θ (theta) $= (\vec{z}_1, \vec{z})$ mesuré autour de $\vec{u}$: angle de "nutation"
* φ (phi) $= (\vec{u}, \vec{x})$ mesuré autour de $\vec{z}$: angle de "rotation propre"



Le passage de la base b_1 à la base b se fait par trois rotations successives : ψ autour de $\vec{z}_1$, θ autour de $\vec{u}$ et φ autour de $\vec{z}$ comme l'indiquent les schémas ci-après.



$$
\begin{array}{ccccccc}
\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 & \overset{\psi}{\longrightarrow} & \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1 & \overset{\theta}{\longrightarrow} & \vec{u}, \vec{w}, \vec{z} & \overset{\varphi}{\longrightarrow} & \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \\
b_1 & & b_2 & & b_3 & & b
\end{array}
$$

4.2 Dérivation de vecteurs

4.2.1 Rappels

Soit $R = (O, b)$ un repère où $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et soit $\vec{v} = v_i\vec{e}_i$ un vecteur dont les composantes sont fonctions du temps t.

Définition 21 (Dérivée d'un vecteur dans une base b) La dérivée par rapport au temps dans la base b du vecteur $\vec{v}$ est le vecteur admettant comme composantes dans la base b les dérivées par rapport au temps des composantes de $\vec{v}$ dans b.

Remarque : on dit également dérivée dans le repère R si on ne désire pas faire apparaître explicitement la base b. Il sera également fait usage de l'abréviation dérivée d'un vecteur au lieu de *dérivée d'un vecteur par rapport au temps* chaque fois qu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Notation :

$$\frac{d_b\vec{v}}{dt} = \frac{dv_i}{dt}\vec{e}_i = \dot{v}_i\vec{e}_i$$

avec donc

$$\frac{dv_i}{dt} = \dot{v}_i$$

et, de même

$$\frac{d\dot{v}_i}{dt} = \ddot{v}_i$$

Remarque 12 :Conséquences

$$\frac{d_b\left(\lambda\vec{v}\right)}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}\vec{v} + \lambda\frac{d_b\vec{v}}{dt}$$
$$\frac{d_b\left(\vec{v}+\vec{w}\right)}{dt} = \frac{d_b\vec{v}}{dt} + \frac{d_b\vec{w}}{dt}$$
$$\frac{d\left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)}{dt} = \frac{d_b\vec{v}}{dt}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\frac{d_b\vec{w}}{dt}$$
$$\frac{d\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)}{dt} = \left(\frac{d_b\vec{u}}{dt},\vec{v},\vec{w}\right) + \left(\vec{u},\frac{d_b\vec{v}}{dt},\vec{w}\right) + \left(\vec{u},\vec{v},\frac{d_b\vec{w}}{dt}\right)$$
$$\frac{d_b\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)}{dt} = \frac{d_b\vec{v}}{dt}\wedge\vec{w} + \vec{v}\wedge\frac{d_b\vec{w}}{dt}$$

Remarque 13 La dérivée d'un vecteur de norme constante est orthogonale au vecteur.

Remarque 14 Si la dérivée d'un vecteur lui est colinéaire, ce vecteur a une direction constante dans la base de dérivation.

4.2.2 Dérivation composée

Le problème qui se pose est le suivant : comparer les dérivées d'un vecteur dans deux bases connaissant l'évolution des bases (toujours orthonormées directes) l'une par rapport à l'autre.

Soient $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $\beta = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ les deux bases, $\mathcal{E}_\beta$ l'espace vectoriel des vecteurs constants dans la base β, qu'on dit aussi liés à cette base.

Définition 22 (Vecteur rotation instantanée)

L'application qui à un vecteur de $\mathcal{E}_\beta$ fait correspondre sa dérivée par rapport au temps dans b est antisymétrique. Soit $\mathcal{L}$ cette application. Si $\vec{v}$ appartient à $\mathcal{E}_\beta$, sa norme est constante donc sa dérivée par rapport au temps dans b lui est orthogonale ; de plus, si $\vec{v}$ et $\lambda\vec{v}$ appartiennent à $\mathcal{E}_\beta$, alors λ est constante et $\mathcal{L}(\lambda\vec{v}) = \lambda\mathcal{L}(\vec{v})$, et $\mathcal{L}\,(\vec{v}+\vec{w}) = \mathcal{L}(\vec{v}) + \mathcal{L}(\vec{w})$ donc l'application $\mathcal{L}$ est linéaire et transforme un vecteur de $\mathcal{E}_\beta$ en un vecteur qui lui est orthogonal ; l'application $\mathcal{L}$ est donc antisymétrique. On peut lui associer un vecteur qui sera noté : $\vec{\Omega}_{\beta/b}$, vecteur appelé : vecteur rotation instantanée de β par rapport à b . On aura donc :

Lemme 1 de la formule de Bour

$$\vec{v} \text{ constant dans la base } \beta \Rightarrow \frac{d_b\vec{v}}{dt} = \vec{\Omega}_{\beta/b} \wedge \vec{v}$$

Théorème 5 formule de dérivation composée (de Bour)

Soit un vecteur $\vec{X} = X_i(t)\vec{\varepsilon}_i$, alors :

$$\boxed{\frac{d_b\vec{X}}{dt} = \frac{d_\beta\vec{X}}{dt} + \vec{\Omega}_{\beta/b} \wedge \vec{X}}$$

Conséquences :
* $\vec{\Omega}_{b/b} = 0$

* Étant données trois bases orthonormées b_1 , b_2 et b_3 :
  $\vec{\Omega}_{b_3/b_1} = \vec{\Omega}_{b_3/b_2} + \vec{\Omega}_{b_2/b_1}$

* $\vec{\Omega}_{b_2/b_1} = - \vec{\Omega}_{b_1/b_2}$

4.2.3 Angles d'Euler et rotation instantanée

$$\underset{b_1}{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1} \xrightarrow{\psi} \underset{b_2}{\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1} \xrightarrow{\theta} \underset{b_3}{\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}} \xrightarrow{\varphi} \underset{b}{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

En comparant les expressions des dérivées dans b_1 de $\vec{z}_1$ et de $\vec{u}$ obtenues soit par la définition (en exprimant les composantes dans b_1), soit par la formule de Bour, on obtient aisément : $\vec{\Omega}_{b_2/b_1} = \dot{\psi}\vec{z}_1$. En utilisant les remarques précédentes on obtient alors :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{b/b_1} = \dot{\psi}\vec{z}_1 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z}}$$

4.3 Cinématique du solide

En cinématique, un solide est un ensemble de points dont les distances mutuelles sont constantes au cours du temps. Soit $R = (O, b)$ le repère de référence (fixe), de base $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et soit P un point mobile par rapport à ce repère. Le vecteur position de P dans R est défini par $\overrightarrow{OP} = X_i\vec{e}_i$ où les X_i sont fonctions du temps.

Définition 23 (Position) La position dans le repère R d'un point P à un instant τ est le point lié à R (fixe par rapport à R) qui coïncide avec P à l'instant τ considéré.

Définition 24 (Trajectoire) La trajectoire de P dans le repère R est l'ensemble des positions de ce point dans le repère.

Définition 25 (Vitesse) La vitesse par rapport au repère R d'un point P est définie par :

$$\vec{V}(P/R) = \vec{V}_R(P) = \frac{d_b\overrightarrow{OP}}{dt}$$

Remarque : Si O' est un point fixe par rapport au repère R, alors :

$$\vec{V}_R(P) = \frac{d_b\overrightarrow{O'P}}{dt}$$

Définition 26 (Accélération) L'accélération par rapport au repère R d'un point P est définie par :

$$\vec{\gamma}(P/R) = \vec{\gamma}_R(P) = \frac{d_b\vec{V}_R(P)}{dt}$$

4.3.1 Torseur cinématique

Soit $R_1 = (O_1, b_1)$ un repère pris comme référence, repère dit fixe et soit $R = (O, b)$ un repère dit mobile, c'est-à-dire mobile par rapport à R_1. Bases respectives de ces repères : $b_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ pour R_1 et $b = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ pour R.

Soient A et B deux points liés à R, $\overrightarrow{AB}$ est par conséquent constant dans la base b, donc avec la dérivation composée :

$$\frac{d_{b_1}\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{\Omega}_{b/b_1} \wedge \overrightarrow{AB}$$

En remarquant que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O_1B}$ - $\overrightarrow{O_1A}$,

$$\frac{d_{b_1}\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{V}_{R_1}(B) - \vec{V}_{R_1}(A)$$

En définitive,

$$\vec{V}_{R_1}(B) = \vec{V}_{R_1}(A) + \vec{\Omega}_{b/b_1} \wedge \overrightarrow{AB}$$

L'application qui à un point lié au solide R fait correspondre sa vitesse par rapport à R_1 est donc un champ antisymétrique.

Définition 27 (Torseur cinématique de R par rapport à R_1) C'est le torseur dont le moment en un point lié à R est la vitesse de ce point par rapport à R_1.

Notation : $[T_c(R/R_1)]$

$$\forall P \text{ lié à } R \quad \vec{V}(P/R_1) \; = \; \overrightarrow{\mathcal{M}}_P\,[T_c(R/R_1)]$$

Remarque 15 (Interprétation) On peut également dire que le moment en un point M à un instant τ du torseur cinématique de R par rapport à R_1 est la vitesse par rapport à R_1 à cet instant τ du point P lié à R coïncidant avec M à cet instant.

Remarque 16 (résultante) La résultante du torseur cinématique n'est autre que le vecteur rotation instantanée de b par rapport à b_1.

Définition 28 (Axe instantané) L'axe central du torseur cinématique est dit axe instantané du mouvement de R par rapport à R_1

Ses trajectoires dans R et R_1 sont les surfaces axoïdes du mouvement.

La formule reliant les vitesses par rapport à R_1 de deux points A et B liés à R est en fait la formule du transport du moment ; elle est souvent appelée :

Théorème 6 (formule fondamentale de la cinématique du solide)

$$\boxed{\vec{V}(B/R_1) = \vec{V}(A/R_1) + \vec{\Omega}_{b/b_1} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

En dérivant dans b_1 par rapport au temps la formule précédente, on obtient une relation entre les accélérations de deux points liés au solide R :

Théorème 7 (formule de Rivals)

$$\boxed{\vec{\gamma}(B/R_1) = \vec{\gamma}(A/R_1) + \frac{d_{b_1}\vec{\Omega}_{b/b_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{b/b_1} \wedge \left(\vec{\Omega}_{b/b_1} \wedge \overrightarrow{AB}\right)}$$

4.3.2 Mouvements particuliers

Caractérisation du torseur cinématique de mouvements particuliers d'un repère R par rapport à un repère R_1

Définition 29 Repos : À tout instant, le torseur cinématique est nul.

Définition 30 Translation : À tout instant, le torseur cinématique est un couple, donc le vecteur rotation instantanée est nul.

Le champ des vitesses par rapport à R_1 des points liés à R est uniforme, c'est-à-dire qu'à tout instant, tous les points liés à R ont même vitesse par rapport à R_1 (et donc même accélération). Ce mouvement se caractérise aussi par le fait que la base b reste constante dans la base b_1 et qu'ainsi les axes du repère R gardent des directions constantes dans R_1.

Définition 31 Rotation : À tout instant, le torseur cinématique est un glisseur

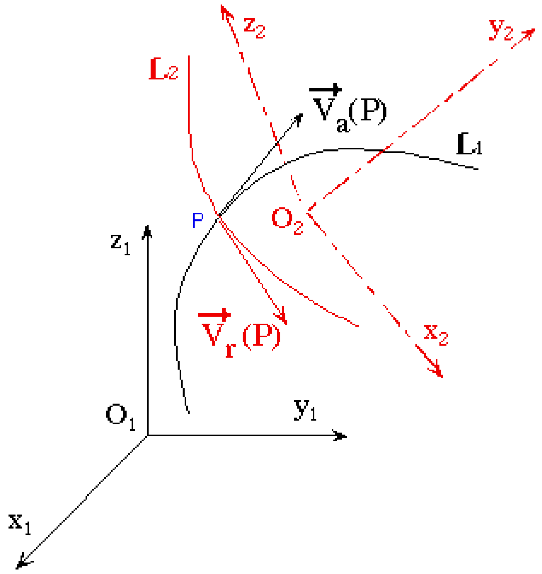
Il existe donc à tout instant un point K où le moment du torseur cinématique est nul. Le point lié à R qui se trouve en K à un instant τ voit donc sa vitesse s'annuler à cet instant : il est naturellement appelé point de vitesse nulle, sous-entendu point lié à R de vitesse nulle par rapport à R_1 à l'instant considéré. Le glisseur est également le torseur d'un vecteur glissant noté $\left((\vec{\Omega}_{b/b_1}, \Delta_{R/R_1}\right)$, l'axe central Δ_{R/R_1} du glisseur est appelé axe instantané de rotation de R par rapport à R_1.

4.3.3 Composition de mouvements

4.3.3.1 Généralités

Soient $R_1 = (O_1, b_1)$ et $R_2 = (O_2, b_2)$ deux repères orthonormés. R_1 sera considéré comme repère fixe, c'est-à-dire de référence, et R_2 comme repère mobile.

On qualifiera d'absolu tout ce qui est relatif à R_1 (repère absolu) : mouvement, trajectoire $\mathcal{L}_1$, vitesse $\vec{V}_a(P) = \vec{V}(P/R_1)$, accélération $\vec{\gamma}_a(P) = \vec{\gamma}(P/R_1)$; et on qualifiera de relatif ce qui est relatif à R_2 : mouvement, trajectoire $\mathcal{L}_2$, vitesse $\vec{V}_r(P) = \vec{V}(P/R_2)$, accélération $\vec{\gamma}_r(P) = \vec{\gamma}(P/R_2)$.



Le mouvement de P par rapport au repère R_1 sera dit être la composition du mouvement de P par rapport au repère R_2 avec le mouvement de R_2 par rapport à R_1. Notation symbolique : $\dfrac{P}{R_1} = \dfrac{P}{R_2} \circ \dfrac{R_2}{R_1}$

D'une manière globale, le mouvement de R_2 par rapport à R_1 est dit mouvement d'entraînement du point P. Plus précisément, on peut définir la vitesse d'entraînement de P à un instant τ comme

* soit la vitesse qu'aurait le point P à l'instant τ par rapport à R_1 si à cet instant il était lié à R_2
* soit la vitesse à l'instant τ par rapport à R_1 du point lié à R_2 coïncidant avec P à l'instant τ.

Les définitions sont semblables pour l'accélération d'entraînement.

D'après la définition du torseur cinématique, la vitesse d'entraînement du point P est donc le moment en P du torseur cinématique de R_2 par rapport à R_1. Si on suppose connus les éléments de réduction en O_2 de ce torseur, soit $\vec{\Omega}_{b_2/b_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O_2}\left[T_c(R_2/R_1)\right] = \vec{V}(O_2/R_1)$ alors

$$\vec{V}_e(P) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_P\left[T_c(R_2/R_1)\right] = \vec{V}(O_2/R_1) + \vec{\Omega}_{b_2/b_1} \wedge \overrightarrow{O_2P}$$

L'accélération d'entraînement peut être obtenue par la formule de Rivals.

$$\vec{\gamma}_e(P) = \vec{\gamma}(O_2/R_1) + \frac{d_{b_1}\vec{\Omega}_{b_2/b_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2P} + \vec{\Omega}_{b_2/b_1} \wedge \left(\vec{\Omega}_{b_2/b_1} \wedge \overrightarrow{O_2P}\right)$$

4.3.3.2 Composition des vitesses et des accélérations

On suppose connus les mouvements de P par rapport à R_2 et de R_2 par rapport à R_1. On peut alors définir le vecteur position de P dans R_1 sous la forme :
$\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2P}$ avec $\overrightarrow{O_2P} = X_{2i}\vec{e}_{2i}$, et $b_2 = (\vec{e}_{21}, \vec{e}_{22}, \vec{e}_{23})$

En dérivant une première fois cette expression par rapport au temps dans la base b_1, on obtient :

$$\frac{d_{b_1}O_1\vec{P}}{dt} = \frac{d_{b_1}O_1\vec{O}_2}{dt} + X_{2i}\frac{d_{b_1}\vec{e}_{2i}}{dt} + \frac{dX_{2i}}{dt}\vec{e}_{2i}$$

soit encore :

$$\vec{V}(P/R_1) = \vec{V}(O_2/R_1) + X_{2i}\frac{d_{b_1}\vec{e}_{2i}}{dt} + \frac{dX_{2i}}{dt}\vec{e}_{2i}$$

$$\text{où } \vec{V}(P/R_1) = \vec{V}_a(P)$$

$$\text{et } \frac{dX_{2i}}{dt}\vec{e}_{2i} = \vec{V}_r(P)$$

$$\frac{d_{b_1}O_1\vec{O}_2}{dt} + X_{2i}\frac{d_{b_1}\vec{e}_{2i}}{dt} = \vec{V}_e(P)$$

puisque c'est la vitesse qu'aurait P par rapport à R_1 si les X_{2i} étaient constants, c'est-à-dire P fixe dans R_2 et, sachant que

$$\frac{d_{b_1}\vec{e}_{2i}}{dt} = \vec{\Omega}_{b_2/b_1} \wedge \vec{e}_{2i}$$

on retrouve bien :

$$\vec{V}_e(P) = \vec{V}(O_2/R_1) + \vec{\Omega}_{b_2/b_1} \wedge \overrightarrow{O_2P}$$

D'où la formule de composition des vitesses :

$$\boxed{\vec{V}_a(P) = \vec{V}_e(P) + \vec{V}_r(P)}$$

Remarque 17 Relation entre moment en un point d'un torseur cinématique et vitesses de ce point par rapport aux repères :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_P\left[T_c(R_2/R_1)\right] = \vec{V}(P/R_1) \text{ - } \vec{V}(P/R_2)$$

En dérivant par rapport au temps dans la base b_1 la relation entre les vitesses, on obtient :

$$\frac{d_{b_1}\vec{V}(P/R_1)}{dt} = \frac{d_{b_1}\vec{V}(O_2/R_1)}{dt} + X_{2i}\frac{d_{b_1}}{dt}\left(\frac{d_{b_1}\vec{e}_{2i}}{dt}\right) + 2\frac{dX_{2i}}{dt}\frac{d_{b_1}\vec{e}_{2i}}{dt} + \frac{d^2X_{2i}}{dt^2}\vec{e}_{2i}$$

où :

$$\frac{d_{b_1}\vec{V}(P/R_1}{dt} = \vec{\gamma}_a(P)$$

$$\frac{d_{b_1}\vec{V}(O_2/R_1}{dt} + X_{2i}\frac{d_{b_1}}{dt}\left(\frac{d_{b_1}\vec{e}_{2i}}{dt}\right) = \vec{\gamma}_e(P)$$

$$\frac{d^2X_{2i}}{dt^2}\vec{e}_{2i} = \vec{\gamma}_r(P)$$

et le terme dit "accélération complémentaire" ou "de Coriolis" :

$$2\frac{dX_{2i}}{dt}\frac{d_{b_1}\vec{e}_{2i}}{dt} = \vec{\gamma}_c(P)$$

qui peut encore s'écrire :

$$\vec{\gamma}_c(P) = 2\vec{\Omega}_{b_2/b_1} \wedge \vec{V}_r(P)$$

et donc la formule de composition des accélérations

$$\boxed{\vec{\gamma}_a(P) = \vec{\gamma}_e(P) + \vec{\gamma}_c(P) + \vec{\gamma}_r(P)}$$

Remarque 18 Cas de plusieurs repères

Pour trois repères R_1, R_2 et R_3, on considère la composition de mouvements :

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_3}{R_2} \circ \frac{R_2}{R_1}$$

Pour tout point P lié à R_3, sachant que
$\vec{V}_a(P) = \vec{V}(P/R_3) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_P\left[T_c(R_3/R_1)\right]$
$\vec{V}_r(P) = \vec{V}(P/R_2) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_P\left[T_c(R_3/R_2)\right]$

$\vec{V}_e(P) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_P\left[T_c(R_2/R_1)\right]$

on peut donc écrire

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_P\left[T_c(R_3/R_1)\right] = \overrightarrow{\mathcal{M}}_P\left[T_c(R_3/R_2)\right] + \overrightarrow{\mathcal{M}}_P\left[T_c(R_2/R_1)\right]$

qui entraîne l'égalité :

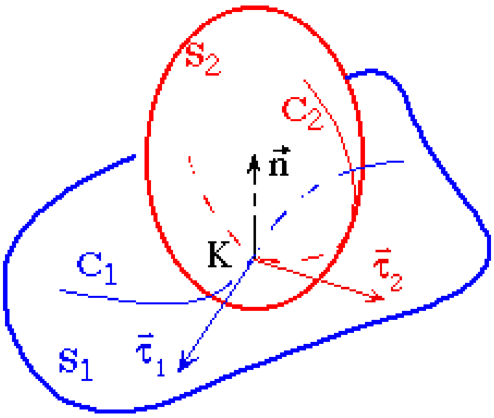
$$[T_c(R_3/R_1)] = [T_c(R_3/R_2)] + [T_c(R_2/R_1)]$$

ainsi que le :

Théorème 8 dit : des mouvements inverses

$$[T_c(R_2/R_1)] = -\left[T_c(R_1/R_2)\right]$$

4.3.4 Cinématique de contact



On considère deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel en K. Lors du mouvement relatif de ces solides, on appelle $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les trajectoires de K sur S_1 et S_2, de vecteurs unitaires tangents en K respectivement $\vec{\tau}_1$ et $\vec{\tau}_2$ (courbes orientées).

Définition 32 Vitesse de glissement : On appelle vitesse de glissement de S_2 par rapport à S_1 le moment en K du torseur cinématique de S_2 par rapport à S_1.

Cette définition est dite par la cinématique des solides
Notation :

$$\vec{\mathcal{G}}_{21} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_K \left[T_c(S_2/S_1) \right]$$

Remarque 19 La vitesse de glissement à un instant τ est la vitesse à l'instant τ par rapport au solide S_1 de la particule de S_2 qui se trouve au contact à cet instant.

En utilisant pour le point de contact K la composition de mouvements :

$$\frac{K}{S_1} = \frac{K}{S_2} \circ \frac{S_2}{S_1}$$

on obtient une autre définition, dite par la cinématique du point de contact :

$$\vec{\mathcal{G}}_{21} = \vec{V}(K/S_1) - \vec{V}(K/S_2)$$

Les vitesses de K étant tangentes aux trajectoires, la vitesse de glissement est dite dans le plan tangent en K aux deux surfaces, c'est-à-dire qu'elle vérifie : $\vec{\mathcal{G}}_{21} \cdot \vec{n} = 0$.

Dans la cinématique du mouvement de S_2 par rapport à S_1, le vecteur rotation instantanée de S_2 par rapport à S_1, soit $\vec{\Omega}_{21}$ est décomposé en sa composante suivant la normale $\vec{n}$ au plan tangent commun en K aux deux solides, notée $\vec{\Omega}_{p21}$, et sa composante suivant ce plan tangent, notée $\vec{\Omega}_{r21}$.

$\vec{\Omega}_{p21}$ est la rotation instantanée de pivotement, $\vec{\Omega}_{r21}$ la rotation instantanée de roulement.

Remarque 20 : Non glissement

On dit qu'il y a non glissement de S_2 par rapport à S_1 si à tout instant la vitesse de glissement est nulle.

* Le mouvement de S_2 par rapport à S_1 est alors une rotation dont l'axe instantané Δ_{21} passe par K.
* Le point K a alors même vitesse par rapport aux deux solides et donc les courbes $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_1$ sont tangentes en K.

Remarque 21 Une condition nécessaire de non glissement simultané dans le cas où il y a plusieurs points de contact est que ces points soient alignés.

4.3.5 Mouvement plan sur plan : notions.

Définition 33 : Mouvement plan sur plan d'un solide par rapport à un autre solide :

Un solide S_2 est en "mouvement plan sur plan"par rapport à un solide S_1 s'il existe un repère $R_2 = (O_2, b_2)$, avec $b_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, lié à S_2 et un repère $R_1 = (O_1, b_1)$, avec $b_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, lié à S_1 tels que $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ avec O_2 demeurant dans le plan $O_1x_1y_1$.

Les plans $\pi_1 = O_1x_1y_1$ et $\pi_2 = O_2x_2y_2$ restent alors globalement confondus au cours du mouvement, d'où l'appellation plan sur plan

Soient X_1, Y_1 et θ les paramètres de position de R_2 par rapport à R_1, avec X_1, Y_1 : coordonnées de O_2 dans le plan π_1 et θ défini par :

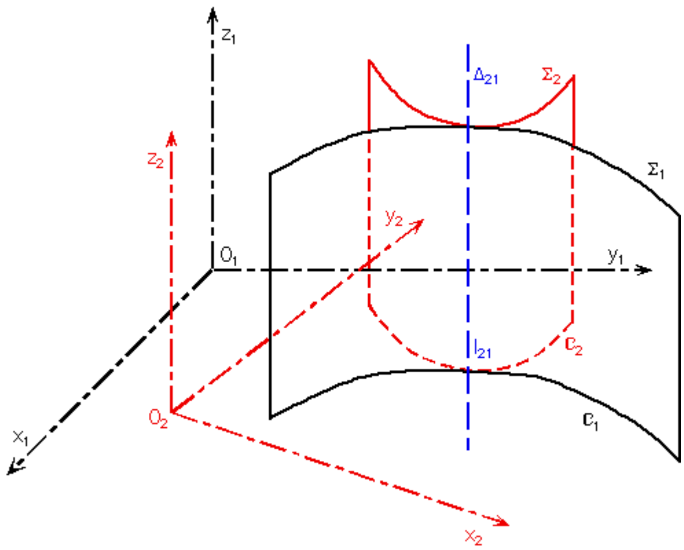
$$\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 \xrightarrow{\theta} \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1$$

Le torseur cinématique de R_2 par rapport à R_1 est alors défini par son vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}_{21} = \dot{\theta}\vec{z}_1$ et son moment en O_2 qui n'est autre que $\vec{V}(O_2/R_1)$. Si $\dot{\theta}$ est nul, le mouvement est une translation, sinon c'est une rotation.

Dans ce cas, l'axe instantané de rotation Δ_{21} de vecteur directeur $\vec{z}_1$ a une direction constante dans les deux repères et les surfaces axoïdes du mouvement : Σ_2 dans R_2 et Σ_1 dans R_1 sont des surfaces cylindriques.

On appelle $\mathcal{C}_1$ (base) et $\mathcal{C}_2$ (roulante), les intersections respectives de Σ_1 et Σ_2 avec les plans π_1 et π_2. Le point d'intersection I_{21} de Δ_{21} avec les plans π_2 et π_1 est dit "Centre Instantané de Rotation (CIR)" de π_2 par rapport à π_1. Les courbes $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_1$ sont donc les trajectoires du CIR dans les plans π_2 et π_1, et, Δ_{21} étant axe de rotation : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I_{21}}[T_c(R_2/R_1)] = 0 = \vec{V}(I_{21}/R_1)$ - $\vec{V}(I_{21}/R_2)$, ces courbes sont tangentes en I_{21}.

Les surfaces axoïdes admettent donc comme plan tangent le plan défini par l'axe instantané Δ_{21} et la tangente commune en I_{21} à $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_1$. Ces surfaces roulent sans glisser l'une sur l'autre car le vecteur rotation instantanée de pivotement est nul, et, le long de l'axe instantané Δ_{21}, le moment du torseur cinématique de R_2 par rapport à R_1 est nul, or c'est aussi la vitesse de glissement de Σ_2 par rapport à Σ_1.



Si un point P_2 lié à R_2 a comme projection dans π_2 le point M_2, ce point est également lié à R_2 et de $\overrightarrow{M_2P_2} = \overrightarrow{O_1P_2}$ - $\overrightarrow{O_1M_2}$, on déduit que ces deux points ont des trajectoires parallèles, même vitesse et même accélération par rapport à R_1. Il suffit donc d'étudier le mouvement par rapport à π_1 des points situés dans le plan π_2 et liés à ce plan.

Pour un tel point P_2, on a

$$\vec{V}(P_2/\pi_1) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{P_2}\left[T_c(R_2/R_1)\right]$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{P_2}\left[T_c(R_2/R_1)\right] = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{I_{21}}\left[T_c(R_2/R_1)\right] + \vec{\Omega}_{21} \wedge \overrightarrow{I_{21}P_2}$$

avec $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I_{21}}\left[T_c(R_2/R_1)\right] = 0$, ce qui donne la :

Remarque 22 Le centre instantané de rotation se trouve sur la normale en P_2 à la trajectoire de ce point dans le plan π_2

Dans le cas de trois plans π_1, π_2 et π_3 restant globalement confondus :

Remarque 23 Les CIR des mouvements de π_3 par rapport à π_2, de π_2 par rapport à π_1 et de π_3 par rapport à π_1 sont alignés.

Chapitre 5

GÉOMÉTRIE DES MASSES

5.1 Systèmes matériels

5.1.1 Rappels :

Les systèmes matériels envisagés dans ce chapitre sont des ensembles fermés de particules.

Un fractionnement d'un système matériel S est une partition matérielle du système en sous-systèmes S_i notée $S = \bigcup_{i=1}^{i=n} S_i$

Ces systèmes seront soit des ensembles discrets de points matériels P_i de masse m_i, notés $S = \bigcup_{i=1}^{i=n} (P_i, m_i)$ ou des ensembles à distribution continue de masse, dotés d'une masse spécifique ρ linéique, surfacique ou volumique suivant le schéma de représentation du système.

On utilisera les intégrales relatives aux distributions de masse d'une fonction scalaire f définie sur le système S notées : $I = \displaystyle\int_S f(P)dm(P)$; cette notation représentera aussi bien la somme $\sum_{i=1}^{i=n} (m_i f(P_i))$, si le système est "discret", que des intégrales curvilignes, doubles ou triples avec $dm(P)$ égal au produit de la masse spécifique $\rho(P)$ par l'élément de longueur $dl(P)$, l'élément d'aire $d\sigma(P)$ ou l'élément de volume $d\nu(P)$ suivant que le système est représenté par une courbe, une surface ou un volume.

Pour une fonction vectorielle $\vec{g}$, l'intégrale de $\vec{g}$ sera définie à partir des intégrales de ses composantes,

$J_i = \displaystyle\int_S g_i(P)dm(P)$

et on écrira :

$\vec{J} = \displaystyle\int_S \vec{g}(P)dm(P) = \int_S g_i(P)dm(P)\vec{e}_i$

5.1.2 Centre d'inertie

Le centre d'inertie G d'un système matériel S est défini par :
$m(S)\overrightarrow{OG} = \displaystyle\int_S \overrightarrow{OP}dm(P)$ ou $\displaystyle\int_S \overrightarrow{GP}dm(P) = 0$.

Pour un fractionnement $S = \bigcup_{i=1}^{i=n} S_i$, le centre d'inertie de S est le barycentre des centres d'inertie G_i des sous-systèmes S_i, affectés de masses égales à celles des S_i.

Remarque 24 Le centre d'inertie appartient à tout élément de symétrie matérielle.

On entend par symétrie matérielle la symétrie géométrique doublée de la symétrie de la répartition de masse.

5.1.3 Moments d'inertie

Définition 34 Moments d'inertie :

On appelle moment d'inertie d'un système matériel S par rapport à un point O, un axe Δ ou un plan π l'intégrale $\displaystyle\int_S r^2(P)dm(P)$ où $r(P)$ est la distance de la particule "courante" P de S au point O, à l'axe Δ ou au plan π respectivement.

Notations : (et exemples d'expressions)

* Moment d'inertie par rapport au point O : $I_O^S = \displaystyle\int_S \overrightarrow{OP}^2 dm(P)$

* Moment d'inertie par rapport à un axe Δ passant par O, de vecteur unitaire $\vec{u}$: $I_\Delta^S = \displaystyle\int_S \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)^2 dm(P)$

* Moment d'inertie par rapport à un plan π passant par O, de vecteur normal unitaire $\vec{n}$: $I_\pi^S = \displaystyle\int_S \left(\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}\right)^2 dm(P)$

Remarque 25 Moments d'inertie nul :

Un moment d'inertie ne peut être nul que pour des schématisations particulières de systèmes matériels :

* masse du système négligeable donc considérée comme nulle

* si la masse est non nulle, $I_O^S = 0$ signifie que S est un point matériel situé en O, $I_\Delta^S = O$ quand S est suivant l'axe Δ et $I_\pi^S = 0$ si S est dans le plan π.

Remarque 26 : Relations entre moments d'inertie.

Si $Oxyz$ est un repère orthonormé où X, Y, etZ sont les coordonnées du point courant P d'un système matériel S, les expressions précédentes permettent d'écrire :

$$I_O^S = \int_S (X^2 + Y^2 + Z^2) dm(P)$$

$$I_{Ox}^S = \int_S (Y^2 + Z^2) dm(P)$$

$$I_{Oxy}^S = \int_S Z^2 dm(P)$$

D'où les relations :

* $I_O^S = I_{Oxy}^S + I_{Oyz}^S + I_{Ozx}^S$

* $I_{Ox}^S = I_{Oxy}^S + I_{Oxz}^S$

* $2I_O^S = I_{Ox}^S + I_{Oy}^S + I_{Oz}^S$

Théorème 9 Théorèmes de HUYGENS

Soit S un système matériel de masse m et de centre d'inertie G ;

Si Δ et Δ_G sont deux axes parallèles distants de d, Δ_G passant par G, alors : $\boxed{I_\Delta^S = I_{\Delta_G}^S + md^2}$

De même, si π et π_G sont deux plans parallèles distants de d, π_G passant par G, alors :

$$I_\pi^S = I_{\pi_G}^S + md^2$$

5.2 Opérateur d'inertie

5.2.1 Généralités

Définition 35 Opérateur d'inertie en un point O d'un système matériel S

C'est l'application, notée $\Im_O^S$ qui à un vecteur $\vec{v}$ fait correspondre le vecteur $\Im_O^S(\vec{v})$ défini par :

$$\Im_O^S(\vec{v}) = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{v} \wedge \overrightarrow{OP}\right) dm(P)$$

Théorème 10 de Huygens "généralisé"

Pour un système matériel de masse m, de centre d'inertie G :

$$\Im_O^S = \Im_G^S + \Im_O^{(G,m)}$$

$\Im_O^{(G,m)}$ étant l'application qui à un vecteur $\vec{v}$ fait correspondre
$\Im_O^{(G,m)}(\vec{v}) = m\overrightarrow{OG} \wedge \left(\vec{v} \wedge \overrightarrow{OG}\right)$

Remarque 27 : Symétrie de l'opérateur d'inertie.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \Im_O^S(\vec{v}) &= \vec{u} \cdot \int_S \overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{v} \wedge \overrightarrow{OP}\right) dm(P) \\
&= \int_S \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right) \cdot \left(\vec{v} \wedge \overrightarrow{OP}\right) dm(P) \\
&= \vec{v} \cdot \Im_O^S(\vec{u})
\end{aligned}$$

Définition 36 Forme quadratique d'inertie en un point O d'un système matériel S

C'est l'application, notée $\mathcal{Q}_O^S$ qui à un vecteur $\vec{v}$ fait correspondre le scalaire $\mathcal{Q}_O^S(\vec{v})$ défini par :

$$\mathcal{Q}_O^S(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \Im_O^S(\vec{v})$$

Remarque 28 :

$$\mathcal{Q}_O^S(\vec{v}) = \int_S \left(\vec{v} \wedge \overrightarrow{OP}\right)^2 dm(P)$$

Exemple d'utilisation : La remarque précédente permet d'écrire que le moment d'inertie d'un système matériel S par rapport à un axe Δ passant par un point O, de vecteur unitaire $\vec{u}$ peut se calculer par : $I_\Delta^S = \mathcal{Q}_O^S(\vec{u})$

Définition 37 : Quadrique d'inertie en un point O d'un système matériel S, notée : $\mathcal{E}_O^S$

C'est la surface définie par :

$$\mathcal{E}_O^S = \left\{M : \mathcal{Q}_O^S(\overrightarrow{OM}) = +1\right\}$$

Cette surface est un ellipsoïde dit "ellipsoïde d'inertie", exceptionnellement, du fait de la schématisation des systèmes, on peut avoir un cylindre de révolution.

Remarque 29 Quadrique d'inertie et moment d'inertie

En considérant un axe Δ passant par O, de vecteur unitaire $\vec{u}$, il est également possible de définir la quadrique d'inertie à partir du moment d'inertie du système par rapport à cet axe par :

$$\mathcal{E}_O^S = \left\{ M : \overrightarrow{OM} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{I_\Delta^S}} \right\}$$

5.2.2 Expressions analytiques

5.2.2.1 Matrice d'inertie

On note (O, b) un repère orthonormé où la base b se présentera suivant les besoins sous les formes : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ou $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

L'opérateur d'inertie est une application linéaire symétrique ; sa matrice symétrique dite : matrice d'inertie en O de S relative à la base b présentera, en fonction de la forme de b les expressions suivantes :

$$\frac{\left(\Im_O^S\right)}{b} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

Si on note (X_P, Y_P, Z_P) les coordonnées dans R du point courant P de S, les termes de la matrice d'inertie, représentant en colonnes les composantes des transformés des vecteurs de la base b, seront :

* $A = I_{11} = I_{xx} = \vec{x} \cdot \Im_O^S(\vec{x}) = I_{Ox}^S = \displaystyle\int_S \left(Y_P^2 + Z_P^2\right) dm(P)$
* De même, $B = I_{yy} = I_{22} = I_{Oy}^S$ et $C = I_{33} = I_{zz} = I_{Oz}^S$
* $F = -I_{xy} =$ - $\vec{x} \cdot \Im_O^S(\vec{y}) = \displaystyle\int_S X_P Y_P dm(P)$
* De même $F = \displaystyle\int_S X_P Z_P dm(P)$ et $D = \displaystyle\int_S Y_P Z_P dm(P)$

Remarque 30 Quelques particularités

* Les termes de la diagonale étant les moments d'inertie par rapport aux axes de coordonnées, ils sont positifs et l'un d'eux ne peut s'annuler que si la matière du système est située sur l'axe correspondant (cas limite de représentation où l'on néglige les dimensions transversales à l'axe).

* La trace de la matrice d'inertie, soit $A + B + C$, somme des moments d'inertie par rapport aux axes de coordonnées est donc le double du moment d'inertie du système par rapport à l'origine du repère.
* Les termes D, E et F sont les produits d'inertie du système relatifs aux axes Ox et Oy pour F, Ox et Oz pour E, Oy et Oz pour D.

5.2.2.2 Transformé d'un vecteur

Les transformés par l'opérateur d'inertie ou la forme quadratique d'inertie d'un vecteur $\vec{v}$ s'écriront :

$$\Im_O^S(\vec{v}) = I_{ij} v_j \vec{e}_i$$

$$\mathcal{Q}_O^S(\vec{v}) = I_{ij} v_i v_j$$

Et la quadrique d'inertie sera l'ensemble des points M de coordonnées (X_{M1}, X_{M2}, X_{M3}) vérifiant l'équation :

$$I_{ij} X_{Mi} X_{Mj} = +1$$

Avec les notations A, B ... , et un vecteur $\vec{v}$ de composantes (p, q, r), on obtient :

$$\frac{\Im_O^S(v)}{b} = \begin{cases} Ap - Fq - Er \\ -Fp + Bq - Dr \\ -Ep - Dq + Cr \end{cases}$$

$$\mathcal{Q}_O^S(\vec{v}) = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Epr - 2Fpq$$

Et, pour la quadrique d'inertie : $\mathcal{E}_O^S$ est l'ensemble des points M, (X_M, Y_M, Z_M)

tels que :

$$AX_M^2 + BY_M^2 + CZ_M^2 - 2DY_M Z_M - 2EX_M Z_M - 2FX_M Y_M = 1$$

5.2.3 Repère principal d'inertie

Définition 38 L'axe Ox d'un repère $R = Oxyz$ est dit axe principal d'inertie en O si $\vec{x}$ est vecteur propre de l'opérateur d'inertie en O du système matériel.

On a donc : $\Im_O^S(\vec{x}) = A\vec{x}$, d'où $E = F = 0$. A est dit "moment d'inertie principal".

Définition 39 Le repère R est dit repère principal d'inertie si ses axes sont principaux d'inertie en O.

Remarque 31 Si l'origine du repère principal d'inertie est centre d'inertie du système, le repère est dit "repère central d'inertie"

5.2.3.1 Expressions analytiques en repère principal d'inertie

Dans un repère principal d'inertie, la matrice d'inertie est diagonale et l'on a, pour un vecteur $\vec{v}$ de composantes p, q, r :

avec $\dfrac{(\Im_O^S)}{b} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$ $\qquad \dfrac{\Im_O^S(\vec{v})}{b} = \begin{cases} Ap \\ Bq \\ Cr \end{cases}$

Le transformé de $\vec{v}$ par la forme quadratique est alors :

$\mathcal{Q}(\vec{v}) = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$

et la quadrique d'inertie est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant :

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$

Les intersections de cette surface avec des plans parallèles aux plans de coordonnées sont des ellipses d'où le nom d'ellipsoïde d'inertie donné à cette quadrique.

Remarque 32

Si par exemple la schématisation du système fait que C est nul (matière sur l'axe Oz), alors $A = B$ et la quadrique est un cylindre de révolution d'axe Oz de rayon $\sqrt{A}$.

Remarque 33 Opérateur de révolution

Hors le cas $C = 0$, si $A = B$, l'ellipsoïde d'inertie est de révolution d'axe Oz et la matrice d'inertie a mêmes cœfficients dans toute base orthonormée du genre $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$. L'opérateur d'inertie est dit "de révolution" autour de Oz.

Remarque 34 Opérateur sphérique

C'est l'appellation utilisée quand $A = B = C$, la matrice est scalaire et tous les repères d'origine O sont principaux d'inertie (et la matrice est la même dans toutes les bases associées).

On a alors $\vec{\Im}_O^S(\vec{v}) = A\vec{v}$

$\mathcal{Q}_O^S(\vec{v}) = A(\vec{v})^2$

et l'ellipsoïde d'inertie est une sphère de centre O de rayon $\sqrt{A}$.

5.2.3.2 Quelques cas d'axes principaux d'inertie

* Si Oxy est plan de symétrie matérielle, alors l'axe Oz est principal d'inertie en O.

* Si Ox est axe de symétrie matérielle, alors Ox est principal d'inertie.

* Si Oz est axe de révolution ou de répétition d'ordre supérieur ou égal à trois, alors l'opérateur d'inertie est de révolution autour de Oz.
  Rappel : L'axe Oz est de répétition d'ordre n si une rotation du système de $\dfrac{2\pi}{n}$ autour de l'axe ramène la même distribution de matière.

Chapitre 6

CINÉTIQUE

Remarque 35 Dérivation d'une intégrale

Étant données les intégrales $I = \int_S f(P)dm(P)$ et $\vec{J} = \int_S \vec{g}(P)dm(P)$ où S est un système matériel que l'on suit dans son mouvement par rapport à un repère R_1 de base b_1, on admet les théorèmes suivants de "dérivation" sous le signe somme :

$$\frac{dI}{dt} = \int_S \frac{df}{dt}dm(P)$$

et :

$$\frac{d_{b_1}\vec{J}}{dt} = \int_S \frac{d_{b_1}\vec{g}}{dt}dm(P)$$

6.1 Généralités

Soit S un système matériel de masse m, de centre d'inertie G mobile par rapport à un repère $R_1 = (O_1, b_1)$. On définit les grandeurs cinétiques élémentaires suivantes, relatives à une particule P de masse $dm(P)$:

* Vecteur "quantité de mouvement élémentaire" : $\left(P, \vec{V}_{R_1}(P)dm(P)\right)$

* Vecteur "quantité d'accélération élémentaire" : $(P, \vec{\gamma}_{R_1}(P)dm(P))$

* "Énergie cinétique élémentaire" le scalaire : $\frac{1}{2}\left(\vec{V}_{R_1}(P)\right)^2 dm(P)$

6.2 Torseur cinétique

Définition 40 On appelle torseur cinétique ou torseur des quantités de mouvement de S par rapport à R_1 le torseur noté $[T_\sigma(S/R_1)]$ défini par ses éléments de réduction en un point O :

* Résultante cinétique ou quantité de mouvement de S par rapport à R_1 le vecteur :

$$\vec{C}(S/R_1) = \int_S \vec{V}_{R_1}(P)dm(P)$$

* Moment en O dit "moment cinétique" en O de S par rapport à R_1, noté $\vec{\sigma}_O(S/R_1)$ le vecteur :

$$\vec{\sigma}_O(S/R_1) = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge \vec{V}_{R_1}(P)dm(P)$$

En utilisant la définition du centre d'inertie G : $m\overrightarrow{O_1G} = \int_S \vec{O_1P}dm(P)$, par dérivation sous le signe somme, on obtient l'expression de la quantité de mouvement de S par rapport à R_1 qui sera couramment utilisée par la suite :

$$\vec{C}(S/R_1) = m\vec{V}_{R_1}(G)$$

.

Le transport du moment devient :

$$\vec{\sigma}_P(S/R_1) = \vec{\sigma}_O(S/R_1) + m\vec{V}_{R_1}(G) \wedge \overrightarrow{OP}$$

Étant donné un axe D, de vecteur unitaire $\vec{u}$, on appellera "moment cinétique de S par rapport à cet axe D" le scalaire défini par :

$$\sigma_D(S/R_1) = \vec{u} \cdot \vec{\sigma}_P(S/R_1)$$

où P est un point de D.

6.3 Torseur dynamique

Définition 41 On appelle torseur dynamique ou torseur des quantités d'accélération de S par rapport à R_1 le torseur noté $[T_\delta(S/R_1)]$ défini par ses éléments de réduction en un point O :

* Résultante dynamique ou quantité d'accélération de S par rapport à R_1 le vecteur :

$$\vec{A}(S/R_1) = \int_S \vec{\gamma}_{R_1}(P)dm(P)$$

* Moment en O dit "moment dynamique" en O de S par rapport à R_1, noté $\vec{\delta}_O(S/R_1)$ le vecteur :

$$\vec{\delta}_O(S/R_1) = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge \vec{\gamma}_{R_1}(P)dm(P)$$

On obtient également l'expression de la quantité d'accélération de S par rapport à R_1 qui sera couramment utilisée par la suite :

$$\vec{A}(S/R_1) = m\vec{\gamma}_{R_1}(G).$$

Le transport du moment devient :

$$\vec{\delta}_P(S/R_1) = \vec{\delta}_O(S/R_1) + m\vec{\gamma}_{R_1}(G) \wedge \overrightarrow{OP}$$

Et pour un axe D, de vecteur unitaire $\vec{u}$, on appellera "moment dynamique de S par rapport à cet axe D" le scalaire défini par :

$$\delta_D(S/R_1) = \vec{u} \cdot \vec{\delta}_P(S/R_1)$$

où P est un point de D.

6.4 Énergie cinétique

Définition 42 On appelle Énergie cinétique de S par rapport à R_1 la grandeur scalaire notée $E_c(S/R_1)$ définie par :

$$2E_c(S/R_1) = \int_S \left(\vec{V}_{R_1}(P)\right)^2 dm(P)$$

Remarque : le double de l'énergie cinétique d'un système est appelée force vive du système par rapport au repère.

6.5 Relations entre moments cinétiques et moments dynamiques

6.5.1 Moments en un point

À partir de la définition du moment cinétique en un point O d'un système matériel S de centre d'inertie G, soit :

$$\vec{\sigma}_O(S/R_1) = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge \vec{V}_{R_1}(P)dm(P)$$

par dérivation sous le signe somme, en remarquant que :

$$\frac{d_{b_1}\overrightarrow{OP}}{dt} = \vec{V}(P/R_1) - \vec{V}(O/R_1)$$

on obtient la relation :

$$\frac{d_{b_1}\overrightarrow{\sigma}_O(S/R_1)}{dt} = -\vec{V}(O/R_1) \wedge m\vec{V}(G/R_1) + \overrightarrow{\delta}_O(S/R_1)$$

Cas particuliers : Si O est fixe par rapport à R_1 ou est centre d'inertie de S, alors le moment dynamique en O est la dérivée dans b_1 par rapport au temps du moment cinétique en O.

6.5.2 Moments par rapport à un axe D

Soit D un axe passant par un point O, de vecteur unitaire $\vec{u}$. Sachant que

$$\sigma_D(S/R_1) = \vec{u} \cdot \vec{\sigma}_O(S/R_1)$$

par dérivation, on obtient immédiatement, en utilisant le résultat précédent :

$$\frac{d\sigma_D(S/R_1)}{dt} = \frac{d_{b_1}\vec{u}}{dt} \cdot \vec{\sigma}_O(S/R_1) - \Big(\vec{u}, \vec{V}(O/R_1), m\vec{V}(G/R_1)\Big) + \delta_D(S/R_1)$$

Cas particuliers : Si D est fixe par rapport à R_1 ou si D passe par le centre d'inertie de S et garde une direction constante dans R_1, alors le moment dynamique par rapport à D est la dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à D.

6.6 Composition de mouvements et cinétique

Les formules de composition des vitesses et des accélérations font apparaître de façon naturelle les expressions suivantes, où les indices a, r, e et c signifient absolu, relatif, d'entraînement et complémentaire :

$$[T_{\sigma a}(S)] = [T_{\sigma r}(S)] + [T_{\sigma e}(S)]$$

$$[T_{\delta a}(S)] = [T_{\delta r}(S)] + [T_{\delta e}(S)] + [T_{\delta c}(S)]$$

$$2E_{ca}(S) = 2E_{cr}(S) + 2E_{ce}(S) + 2E_{cc}(S)$$

avec dans la dernière relation :

$$2E_{cc}(S) = 2\int_S \vec{V}_r(P) \cdot \vec{V}_e(P) dm(P)$$

6.7 Théorèmes de KŒNIG

On notera R_{1G} le repère (G, b_1) en translation avec G par rapport à R_1. Le mouvement du système S par rapport à ce repère est dit mouvement de S "autour de son centre d'inertie". Dans la composition de mouvements :

$$\frac{S}{R_1} = \frac{S}{R_{1G}} \circ \frac{R_{1G}}{R_1}$$

l'accélération complémentaire est nulle ; la vitesse d'entraînement est la même pour tous les points, et, valant celle de G, c'est donc la vitesse absolue de G ; de même pour l'accélération d'entraînement qui pour tous les points vaut l'accélération absolue de G.

On obtient les divers théorèmes de Kœnig :

Théorème 11 : Théorème de Kœnig relatif au moment cinétique

$$\vec{\sigma}_G(S/R_1) = \vec{\sigma}_G(S/R_{1G})$$

Théorème 12 : Théorème de Kœnig relatif au moment dynamique

$$\vec{\delta}_G(S/R_1) = \vec{\delta}_G(S/R_{1G})$$

Ces théorèmes peuvent aussi prendre la forme :

$$\vec{\sigma}_P(S/R_1) = \vec{\sigma}_G(S/R_{1G}) + \vec{\sigma}_P((G,m)/R_1)$$

avec $\vec{\sigma}_P((G,m)/R_1) = \overrightarrow{PG} \wedge m\vec{V}_{R_1}(G)$

$$\vec{\delta}_P(S/R_1) = \vec{\delta}_G(S/R_{1G}) + \vec{\delta}_P((G,m)/R_1)$$

avec $\vec{\delta}_P((G,m)/R_1) = \overrightarrow{PG} \wedge m\vec{\gamma}_{R_1}(G)$

Théorème 13 : Théorème de Kœnig relatif à l'énergie cinétique

$$2E_c(S/R_1) = 2E_c(S/R_1) + m(\vec{V}_{R_1}(G))^2$$

où l'on peut également écrire :
$m(\vec{V}_{R_1}(G))^2 = 2E_c((G,m)/R_1)$

6.8 Cinétique du solide

Soit S un solide de masse m, de centre d'inertie G.

6.8.1 Solide en translation

Les points liés au solide ayant même vitesse et même accélération par rapport à R_1, celles de G , le moment cinétique et le moment dynamique en G sont nuls. Le solide est donc équivalent en cinétique à un point matériel situé en G de masse celle du solide. On a alors :

$$\vec{\sigma}_O(S/R_1) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{V}_{R_1}(G)$$
$$\vec{\delta}_O(S/R_1) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{\gamma}_{R_1}(G)$$
$$2E_c(S/R_1) = m(\vec{V}_{R_1}(G))^2$$

6.8.2 Solide en rotation

Il existe donc à tout instant un point K où le moment du torseur cinématique de S par rapport à R_1 est nul. Les vitesses par rapport à R_1 des points P liés à S sont données par l'expression : $\vec{V}_{R_1}(P) = \overrightarrow{\Omega}_{b/b_1} \wedge \overrightarrow{KP}$. On obtient alors :

$$\vec{\sigma}_G(S/R_1) = \Im_G^S(\overrightarrow{\Omega}_{b/b_1})$$

Remarque : Si on appelle Δ l'axe instantané de rotation de S par rapport à R_1, si on pose $\overrightarrow{\Omega}_{b/b_1} = \Omega\vec{u}$ avec $\vec{u}$ vecteur unitaire, alors :

$$\sigma_\Delta(S/R_1) = I_\Delta^S \Omega$$
$$2E_c(S/R_1) = \mathcal{Q}_K^S(\overrightarrow{\Omega}_{b/b_1})$$

soit

$$2E_c(S/R_1) = I_\Delta^S \Omega^2$$

6.8.3 Mouvement autour de G

Si ce mouvement n'est pas le repos, c'est une rotation et on a donc :

$$\vec{\sigma}_G(S/R_{1G}) = \Im_G^S(\overrightarrow{\Omega}_{b/b_1})$$

$$2E_c(S/R_{1G}) = \mathcal{Q}_G^S(\overrightarrow{\Omega}_{b/b_1})$$

Chapitre 7

DYNAMIQUE

7.1 Retour sur le frottement

Rappels : Deux solides S_1 et S_2 sont en contact rigoureusement ponctuel en K. L'ensemble des forces exercées par le solide S_2 sur le solide S_1 est équivalent à une force $\vec{F}_{21}$ exercée sur la particule de S_1 qui se trouve en K, force dite : réaction en K de S_2 sur S_1. On pose $\vec{F}_{21} = N_{21}\vec{n} + \vec{T}_{21}$ où $\vec{n}$ est la normale unitaire au plan tangent commun aux deux solides en K, orientée de S_2 vers S_1, $\vec{T}_{21}$ étant la réaction tangentielle, $N_{21}\vec{n}$ représentant la réaction normale. La condition dite sthénique ou dynamique de contact unilatéral est que $N_{21} > 0$.

Dans le cas du non-glissement au point K, on applique les lois de Coulomb avec un coefficient de frottement dit coefficient de frottement d'adhérence f_0, c'est-à-dire qu'on a

$$\|\vec{T}_{21}\| < f_0 N_{21}.$$

Si le frottement est négligeable, on fait encore l'approximation : $\vec{T}_{21} = 0$, soit une réaction normale aux surfaces en contact.

Si la vitesse de glissement $\vec{\mathcal{G}}_{12}$ de S_1 par rapport à S_2 n'est pas nulle, s'introduit un coefficient de frottement f dit coefficient de frottement de glissement légèrement inférieur ou égal au coefficient f_0 de frottement d'adhérence et tel que :

$$\vec{T}_{21} = -f N_{21} \frac{\vec{\mathcal{G}}_{12}}{\|\vec{\mathcal{G}}_{12}\|}$$

7.2 PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Dans l'Univers (noté $\mathcal{U}$), il existe un repère dit Repère Absolu noté R_a et une mesure dite absolue du temps tels que pour tout système matériel S :

$$\left[\mathcal{F}_{\mathcal{U}-S/S}\right] = [T_\delta(S/R_a)]$$

Remarque 36 "Forces d'inertie"

Quand on utilise un repère auxiliaire R de mouvement connu par rapport au repère absolu R_a, on introduit le vocabulaire particulier des "forces d'inertie" en définissant une densité massique fictive de forces d'inertie d'entraînement $\vec{f_{ie}}$ = - $\vec{\gamma_e}$ et une densité de forces d'inertie complémentaires $\vec{f_{ic}}$ = - $\vec{\gamma_c}$ telles que le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$[T_\delta(S/R)] = \left[\mathcal{F}_{\mathcal{U}-S/S}\right] + [\mathcal{F}_{ie}] + [\mathcal{F}_{ic}]$$

Remarque 37 Repère galiléen

Dans un repère en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au repère absolu, le principe fondamental s'applique de la même façon que dans le repère absolu, un tel repère est dit "galiléen".

Pour la mécanique newtonienne habituelle, en accord avec l'Union Astronomique Internationale, on utilise habituellement un système de référence céleste, repère absolu R_a, construit à partir d'un ensemble de radio-sources extragalactiques observées en interférométrie à très longue base, associé à la mesure d'un temps atomique international où la seconde est la durée de 9.192.631.770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

Les repères "galiléens" usuels (en translation par rapport au repère "absolu" précédent) sont les suivants

* Repère de Copernic : d'origine le centre d'inertie du système solaire

* Repère héliocentrique ou de Kepler : d'origine le centre d'inertie du soleil

* Repère géocentrique ou de Ptolémée : d'origine le centre d'inertie de la Terre.

Dans la mécanique dite de "laboratoire", suffisante pour de nombreuses applications, un repère "terrestre" (lié à la Terre, système de référence réalisé par la donnée des positions de stations d'observations réparties sur la croûte terrestre) pourra être considéré comme galiléen, les "forces d'inertie" étant prises en compte dans la définition de "$\vec{g}$".

Théorème 14 Action et réaction

Comme en statique, on a, pour deux systèmes matériels distincts S_1 et S_2 :

$$\left[\mathcal{F}_{S_1/S_2}\right] = - \left[\mathcal{F}_{S_2/S_1}\right]$$

7.2.1 Équations de la Mécanique

Ce sont les équations vectorielles ou scalaires résultant de l'application du principe fondamental. Pour un système S de masse m, dont le centre d'inertie est G :

Équations vectorielles :

* Théorème du mouvement du centre d'inertie : c'est l'équation de résultante de l'égalité des torseurs (ÉDR)
$$m\vec{\gamma}_{R_a}(G) = \vec{F}_{\mathcal{U}-S/S}$$

* Théorème du moment dynamique : c'est l'équation de moment (EDM) en un point P par exemple
$$\vec{\delta}_P(S/R_a) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_P\left[\mathcal{F}_{\mathcal{U}-S/S}\right]$$

À ces équations correspondent les équations scalaires de la mécanique :

* Les projections de l'équation de résultante sur des directions indépendantes

* Trois équations du moment dynamique par rapport à des axes indépendants.

7.2.2 Équations du mouvement

Ce sont les équations dans lesquelles les seules inconnues sont les paramètres de position du système matériel. On n'y trouve donc pas de forces de liaison.

7.2.3 Intégrales premières du mouvement

Si $(q_1, q_2 \cdots q_n)$ sont les paramètres de position d'un système matériel S, on appelle intégrale première du mouvement de S par rapport à R_a une fonction des q_i, des $\dot{q}_i$ et de t qui reste constante au cours du mouvement, c'est-à-dire, si

$\psi : (q_i, \dot{q}_i, t) \longrightarrow \psi(q_1 \cdots \dot{q}_1 \cdots, t)$

est une telle intégrale, la fonction composée du temps obtenue en remplaçant les q_i par leurs valeurs $q_i(t)$ solutions du principe fondamental est une fonction constante. Si on connait les valeurs q_{i0} et $\dot{q}_{i0}$ des paramètres et de leurs dérivées premières à un instant t_0, on peut écrire l'équation du mouvement relative à l'intégrale première :

$\psi(q_1 \cdots \dot{q}_1 \cdots, t) = \psi(q_{10} \cdots \dot{q}_{10} \cdots, t_0)$.

7.3 Puissance de forces et énergie cinétique

7.3.1 Puissance de forces exercées sur des solides

Définition 43 On appelle puissance par rapport à un repère R d'une force $\vec{F}(P)$ exercée sur une particule P d'un système matériel le scalaire :

$$\mathcal{P}_R(P, \vec{F}(P)) = \vec{F}(P) \cdot \vec{V}_R(P)$$

Remarque 38 Dans une composition de mouvements, la puissance absolue est la somme de la puissance relative et de la puissance d'entraînement

Soit $R = (O, b)$ un repère de référence, S_1 et S_2 deux systèmes matériels distincts. On suppose les forces exercées par S_2 sur S_1 définies par une densité massique $\vec{f}$, les autres configurations s'en déduisent aisément.

Définition 44 Puissance d'un ensemble de forces

On appelle puissance par rapport au repère R de l'ensemble $\mathcal{F}_{21}$ des forces exercées par S_2 sur S_1 le scalaire : $\mathcal{P}_R(\mathcal{F}_{21}) = \displaystyle\int_{S_1} \vec{f}(P) \cdot \vec{V}_R(P) dm(P)$

Théorème 15 Puissance de forces sur un solide

La puissance par rapport à un repère R d'un ensemble $\mathcal{F}_{21}$ de forces exercées par un système S_2 sur un solide S_1 est égale au produit du torseur de ces forces par le torseur cinématique du solide S_1 par rapport au repère R.

$$\mathcal{P}_R(\mathcal{F}_{21}) = \left[\mathcal{F}_{S_2/S_1}\right] \cdot [T_c(S_1/R)]$$

En effet,si on se donne le torseur cinématique du solide S_1 par rapport au repère R par ses éléments de réduction en un point O, soit $\vec{\Omega}_{S_1/R}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O\,[T_c(S_1/R)]$, la vitesse par rapport à R d'une particule P du solide est donnée par le moment en P du torseur cinématique du solide S_1 par rapport au repère R, soit avec le transport du moment :

$\mathcal{P}_R(\mathcal{F}_{21}) = \displaystyle\int_{S_1} \vec{f}(P) \cdot \vec{V}_R(P)dm(P) = \int_{S_1} \vec{f}(P) \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_P \left[T_c(S_1/R)\right] dm(P)$

$\mathcal{P}_R(\mathcal{F}_{21}) = \displaystyle\int_{S_1} \vec{f}(P) \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_O \left[T_c(S_1/R)\right] dm(P) + \int_{S_1} \left(\vec{f}(P), \vec{\Omega}_{S_1/R}, \overrightarrow{OP}\right) dm(P)$

et donc, en sortant $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O \left[T_c(S_1/R)\right]$ et $\vec{\Omega}_{S_1/R}$ de l'intégrale :

$\mathcal{P}_R(\mathcal{F}_{21}) = \vec{F}_{21} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_O \left[T_c(S_1/R)\right] + \vec{\Omega}_{S_1/R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_O[\mathcal{F}_{21}]$

Remarque 39 Si un ensemble de forces exercées sur un "solide" a un torseur nul, alors la puissance de cet ensemble de forces est nulle

C'est donc vrai en particulier pour l'ensemble des forces intérieures à un solide.

7.3.2 Puissance de liaison

Remarque 40 Puissance d'entraînement

Pour deux systèmes distincts S_1 et S_2, dans une composition de mouvements où le repère absolu est R et le repère "relatif" est R^*,

$$\vec{V}_e(P) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_P \left[T_c(R^*/R)\right]$$

la puissance d'entraînement s'écrit donc $\displaystyle\int_{S_1} \vec{f}(P) \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_P \left[T_c(R^*/R)\right] dm(P)$ et on a alors :

$$\mathcal{P}_e(\mathcal{F}_{21}) = [\mathcal{F}_{21}] \cdot [T_c(R^*/R)]$$

Remarque 41 Si un ensemble de forces exercées sur un "système matériel" a un torseur nul, alors la puissance de cet ensemble de forces est indépendante du repère

C'est donc vrai en particulier pour l'ensemble des forces intérieures à un système matériel.

Définition 45 Puissance de liaison

Soient S_1 et S_2 deux solides, $\mathcal{F}_{21}$ et $\mathcal{F}_{12}$ les forces exercées respectivement par S_2 sur S_1 et par S_1 sur S_2, la réunion $\mathcal{F}_{L12}$ de $\mathcal{F}_{21}$ et $\mathcal{F}_{12}$, c'est-à-dire l'ensemble des forces mises en jeu par la liaison entre les solides a un torseur nul en vertu du théorème de l'action et de la réaction, la puissance de $\mathcal{F}_{L12}$ est donc indépendante du repère, on l'appelle puissance de liaison entre les solides et on la note : $\mathcal{P}_{L12}$, l'ordre des indices n'ayant pas d'importance. On peut donc choisir le repère de calcul de cette puissance, et on a par exemple :

* $\mathcal{P}_{L12} = [\mathcal{F}_{21}]\cdot[T_c(S_1/R)] + [\mathcal{F}_{12}]\cdot[T_c(S_2/R)]$

* $\mathcal{P}_{L12} = [\mathcal{F}_{21}]\cdot[T_c(S_1/S_2)]$

* $\mathcal{P}_{L12} = [\mathcal{F}_{12}]\cdot[T_c(S_2/S_1)]$

On remarque donc que seul intervient le mouvement relatif des solides l'un par rapport à l'autre.

Définition 46 Liaison idéale : la liaison entre deux solides est dite "idéale" si la puissance de liaison est nulle por tout mouvement relatif virtuel (imaginable) compatible avec la liaison.

7.4 Puissance de quantités d'accélération

Soit Σ un système matériel, R_1 et R_2 deux repères.

Définition 47 On appelle puissance par rapport à R_1 des quantités d'accélération par rapport à R_2 de Σ la grandeur

$$\mathcal{P}_{R_1}\left(\mathcal{A}_\Sigma/R_2\right) = \int_\Sigma \vec{\gamma_{R_2}}(P)\cdot\vec{V_{R_1}}(P)dm(P)$$

Dans le cas où les deux repères sont identiques, soit $R_2 = R_1$, on dit alors :

Définition 48 La puissance des quantités d'accélération de Σ par rapport à R_1 est :

$$\mathcal{P}_{R_1}\left(\mathcal{A}_\Sigma/R_1\right) = \int_\Sigma \vec{\gamma_{R_1}}(P)\cdot\vec{V_{R_1}}(P)dm(P)$$

Remarque 42 : $\mathcal{P}_{R_1}\left(\mathcal{A}_\Sigma/R_1\right) = \dfrac{dE_c(\Sigma/R_1)}{dt}$

Dans le cas où le système considéré est un solide S, on obtient les résultats suivants :

* $\mathcal{P}_{R_1}\left(\mathcal{A}_S/R_2\right) = [T_\delta(S/R_2)]\cdot[T_c(S/R_1)]$

* $\mathcal{P}_{R_1}\left(\mathcal{A}_S/R_1\right) = [T_\delta(S/R_1)]\cdot[T_c(S/R_1)]$

7.5 Théorèmes de l'énergie cinétique

Soit un système matériel Σ de masse m, de centre d'inertie G, R_a le repère absolu ou (galiléen) du principe fondamental de la dynamique ou un repère R_{a_G} en translation avec G par rapport à ce repère absolu, on a :

Théorème 16 Théorèmes de l'énergie cinétique La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de Σ par rapport à R_a (ou R_{a_G} est égale à la puissance par rapport à ce repère de toutes les forces (intérieures et extérieures) exercées sur ce système

La démonstration est élémentaire dans le cas d'un système Σ formé de solides S_i, soit $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{i=n} S_i$, la puissance des efforts intérieurs à chaque solide S_i étant nulle quel que soit le repère et chaque solide répondant au principe fondamental, soit, avec R_a le repère absolu :

$$\left[\mathcal{F}_{\mathcal{U}-S_i/S_i}\right] = [T_\delta(S_i/R_a)]$$

Dans le cas de ce repère absolu, on fait le produit des deux membres de cette égalité par le torseur cinématique de S_i par rapport au repère absolu et on obtient : $\left[\mathcal{F}_{\mathcal{U}-S_i/S_i}\right] \cdot [T_c(S_i/R_a)] = [T_\delta(S_i/R_a)] \cdot [T_c(S_i/R_a)]$

avec $[T_\delta(S_i/R_a)] \cdot [T_c(S_i/R_a)] = \dfrac{dE_c(S_i/R_a)}{dt}$

Il suffit alors de faire la somme pour i variant de 1 à n pour obtenir le théorème.

Rappels :

Dans le cas d'un repère R_{a_G} en translation avec G par rapport au repère absolu R_a, on considère une composition de mouvements où le mouvement absolu serait le mouvement par rapport à R_a et le mouvement relatif par rapport à R_{a_G}, alors, pour tout point, l'accélération complémentaire est nulle et l'accélération d'entraînement est l'accélération absolue de G.

$\sum_{i=1}^{i=n} [T_\delta(S_i/R_a)] \cdot [T_c(S_i/R_{a_G})] = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{S_i} \vec{\gamma}(P/R_a) \cdot \vec{V}(P/R_{a_G}) dm(P)$

avec, vu la singularité de la composition de mouvements, (en particulier $\vec{\gamma}_e(P) = \vec{\gamma}(G/R_a)$) :

$\sum_{i=1}^{i=n} \int_{S_i} \vec{\gamma}(G/R_a) \cdot \vec{V}(P/R_{a_G}) dm(P) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \int_{S_i} \vec{V}(P/R_{a_G}) dm(P)\right) \cdot \vec{\gamma}(G/R_a)$

$\sum_{i=1}^{i=n} \int_{S_i} \vec{V}(P/R_{a_G}) dm(P) = m\vec{V}(G/R_{a_G}) = 0.$

Index