

# Les ondes électromagnétiques

## Plan

1. [Rappel sur les équations de Maxwell](#)
2. [Equations de propagation en Electromagnétisme](#)
3. [L'onde électromagnétique dans le vide](#)
4. [L'onde électromagnétique dans un diélectrique](#)
5. [L'onde électromagnétique dans un conducteur](#)
6. [Energie des ondes électromagnétiques](#)
7. [Equations de Maxwell et approximation des états quasi-stationnaires](#)
8. [Les différents types d'ondes électromagnétiques](#)

### 1. Rappel sur les équations de Maxwell

$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (1)$	Equation de Maxwell-Gauss : $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho d\tau$
$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2)$	Equation de conservation du flux de $\vec{B}$ : $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$	Equation de Maxwell-Faraday (phénomène d'induction)
$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4)$	Equation de Maxwell-Ampère

$\vec{E}$  est le champ électrique, le  $d\vec{D}$  déplacement (ou induction) électrique,  $\vec{B}$  le champ (ou induction) magnétique,  $\vec{H}$  l'excitation (ou champ) magnétique,  $\rho$  la densité volumique de charges *réelles*,  $\vec{j}$  la densité volumique de courants de charges *réels*.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad [= \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon \vec{E} \text{ pour un milieu linéaire, homogène et isotrope}]$$

$\vec{P}$  est le vecteur polarisation,  $\chi$  la susceptibilité diélectrique et  $\epsilon$  la permittivité du diélectrique.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad [= \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} \text{ pour un milieu linéaire, homogène et isotrope}]$$

$\vec{M}$  est le vecteur aimantation,  $\chi_m$  la susceptibilité magnétique et  $\mu$  la perméabilité du milieu magnétique.

### Conditions de passage à la surface de séparation de deux milieux

Les milieux sont notés 1 et 2, le vecteur unitaire normal  $\vec{n}_{12}$  est orienté du milieu 1 vers le milieu 2.

L'application des équations de Maxwell donne à la frontière des deux milieux :

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma \quad ; \quad B_{t2} = B_{t1} \quad ; \quad E_{t1} = E_{t2} \quad ; \quad \vec{H}_{t2} - \vec{H}_{t1} = \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} \quad \text{équations auxquelles il convient}$$

d'ajouter la continuité du potentiel qui se déduit de la continuité de la composante tangentielle du champ électrique.

## 2. Equations de propagation en Electromagnétisme

- $\text{div } \vec{B} = 0 \Leftrightarrow$  Il existe un vecteur  $\vec{A}$  appelé **potentiel vecteur** tel que  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  où  $\vec{A}$  n'est défini qu'à un gradient additif près.
  - $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \Leftrightarrow$  Il existe une fonction scalaire  $V$  appelé **potentiel scalaire** telle que  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V$  où  $V$  n'est pas défini de manière unique puisque un gradient n'est défini qu'à une constante additive près et puisque le potentiel vecteur n'est défini qu'au gradient d'une fonction quelconque près.
- Il conviendra de parler de couples de valeurs  $(\vec{A}, V)$  possibles associés à un même champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ .

**Remarque :** on se limite aux milieux linéaires, homogènes et isotropes.

### 2.1. Equation de propagation de $\vec{A}$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu \vec{j} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} - \text{grad}(\text{div } \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t}) - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}$$

Nous avons vu qu'il existait plusieurs couples de valeurs possibles  $(\vec{A}, V)$  et nous choisissons celui qui vérifie

$$\text{div } \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Ce résultat important est connu sous le nom de **relation de jauge de Lorentz**.

Ainsi, nous obtenons l'équation de propagation  $\Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}$

### Jauge de Lorentz

Soit le couple  $(\vec{A}', V')$  vérifiant  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}'$  et  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \text{grad } V'$ .

Nous formons un autre potentiel vecteur par la relation  $\vec{A} = \vec{A}' + \text{grad } f$ . En reportant dans

l'expression de  $\vec{E}$ ,

on trouve  $V = V' - \frac{\partial f}{\partial t}$ .

La question est de savoir s'il est possible de trouver une fonction  $f$  telle que le couple  $(\vec{A}, V)$  vérifie la jauge de Lorentz ?

En remplaçant dans cette relation, on obtient l'équation aux dérivées partielles

$\Delta f - \epsilon\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\text{div } \vec{A}' - \epsilon\mu \frac{\partial V'}{\partial t}$  qui permet de calculer la fonction  $f$  ou, surtout, qui prouve que cette fonction existe.

## 2.2. Equation de propagation de $V$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \vec{A}) - \Delta V$$

$$\Delta V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

## 2.3. Equation de propagation de $\vec{E}$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{B}) = -\mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

## 2.4. Equation de propagation de $\vec{B}$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu \text{rot } \vec{j} + \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{E})$$

$$\Delta \vec{B} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \text{rot } \vec{j}$$

## 3. L'onde électromagnétique dans le vide

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 ; \Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Nous avons étudié jusqu'à présent des équations aux dérivées partielles d'une grandeur scalaire à une dimension d'espace ; ici nous devons traiter des équations aux dérivées partielles pour des grandeurs vectorielles (trois dimensions d'espace).

Le champ électrique et le champ magnétique sont reliés dans les équations de Maxwell (il s'agit d'un champ électromagnétique), ils ont été découplés en utilisant des dérivations pour former les équations de propagation.

Nous avons déjà noté que les techniques des séries de Fourier ou de la transformée de Fourier permettent de se ramener à une étude de base où la dépendance avec le temps est de la forme  $\exp j\omega t$ .

Nous posons  $\vec{E} = \vec{E}^* \exp j\omega t$  et  $\vec{B} = \vec{B}^* \exp j\omega t$ .

On appelle **onde plane monochromatique** le cas particulier où  $\vec{E}^*$  et  $\vec{B}^*$  ne sont fonctions que d'une seule variable cartésienne soit, par exemple,  $x$ .

$\text{div} \vec{E}^* = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x^*}{\partial x} = 0$  le champ électrique de l'onde n'a pas de composante suivant  $x$ .

$\text{div} \vec{B}^* = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x^*}{\partial x} = 0$  le champ magnétique de l'onde n'a pas de composante suivant  $x$ .

**Le champ électromagnétique est contenu dans des plans perpendiculaires à l'axe des  $x$ .**

Un choix judicieux de l'axe des  $y$  permet d'écrire  $\vec{E}^* = f(x)\vec{e}_y$ .

En reportant dans l'équation de propagation, on obtient  $\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0$  ( $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ )

et  $\vec{E} = \left( E_1 \exp[j\omega(t - \frac{x}{c})] + E_2 \exp[j\omega(t + \frac{x}{c})] \right) \vec{e}_y$

Nous trouvons, pour le cas particulier de l'onde plane monochromatique, la superposition de deux ondes (progressive et régressive) se propageant à vitesse  $c$ , appelée "**vitesse de la lumière**".

Nous continuons l'étude avec l'onde progressive et calculons le champ magnétique à partir de la

relation  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  qui entraîne  $\vec{B} = \frac{E_1}{c} \exp[j\omega(t - \frac{x}{c})] \vec{e}_z$

Pour l'onde progressive, le vecteur vitesse est égale à  $\vec{v} = c\vec{e}_x$  et  $\vec{E} = \vec{B} \wedge \vec{v}$

Cette dernière relation reste vérifiée pour l'onde régressive à condition d'écrire  $\vec{v} = -c\vec{e}_x$

**Remarque :** on notera bien que ces relations ne sont vraies que pour les ondes planes

monochromatiques. Il en est de même pour le vecteur d'onde  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_x$  qui, d'une manière générale

pour une propagation suivant la direction  $x$ , s'écrit  $\vec{k} = k(\omega) \vec{e}_x$  avec  $k(\omega) \neq \frac{\omega}{c}$ .

#### 4. L'onde électromagnétique dans un diélectrique

Ce qui est dit dans le paragraphe précédent reste vrai en remplaçant  $\epsilon_0$  par  $\epsilon$ . La vitesse de

propagation de l'onde devient  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n}$  où  $n$  est l'indice de réfraction (voir cours

d'optique géométrique) du milieu ( $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0 = n^2$ ).

*On notera que les milieux diélectriques sont, à priori, dispersifs puisque  $\epsilon_r = \epsilon_r(\omega)$  [la polarisation dépend de la fréquence du champ exciteur - voir [théorie de l'électron élastiquement lié](#)]*

#### 5. L'onde électromagnétique dans un conducteur

Nous supposons vérifiées les conditions de validité de la loi d'Ohm  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  (nous excluons le domaine des hyperfréquences), ce qui entraîne que la densité volumique de charges  $\rho$  est nulle.

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 ; \Delta \vec{B} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

La direction  $x$  est choisie comme direction d'écoulement du courant et nous considérons un conducteur en forme de plaque de dimensions supposées infinies dans la direction des  $z$  plutôt qu'un conducteur à symétrie de révolution pour lequel la résolution amène à utiliser des fonctions de Bessel.

$$\vec{E} = E^*(x, y) \exp(j \omega t) \vec{e}_x \Rightarrow \frac{\partial^2 E^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E^*}{\partial y^2} - j \omega \mu_0 \sigma E^* + \frac{\omega^2}{c^2} E^* = 0$$

Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles, nous utilisons la technique de séparation de variables en posant  $E^* = f(x)g(y)$ .

$$\text{On obtient } \frac{f''}{f} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \text{ et } \frac{g''}{g} - j \omega \mu_0 \sigma = 0$$

En se limitant à une onde progressive et un conducteur suffisamment épais (direction  $y$  importante)

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} y\right) \exp\left[j\left(\omega t - \frac{\omega x}{c} - \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} y\right)\right]$$

- Cette formule montre que le courant électrique passe plus facilement en surface qu'en profondeur (ce phénomène est appelé **effet pelliculaire** ou **effet de peau** ; il devient significatif dans un conducteur pour des fréquences élevées ; l'épaisseur de peau est définie par

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}.$$

- Elle montre aussi explicitement en quoi consiste **l'approximation des états quasi-stationnaires** dans un conducteur (c'est à dire quand on peut négliger l'aspect propagation). En négligeant les phénomènes liés à l'effet de peau (ce qui se passe dans la direction  $y$ ), on peut écrire :

$$\vec{E} \approx \vec{e}_x E_0 \exp\left[j\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)\right].$$

Pour un conducteur de longueur  $l$ , négliger le phénomène de propagation revient à avoir la

condition  $\frac{\omega l}{c} \ll 2 \pi$  (qui est équivalente à  $l \ll \lambda$ )

Pour le 50 Hz, la longueur d'onde est égale à 6000 km.

## 6. Energie des ondes électromagnétiques

Il est commode de définir le **vecteur de Poynting**  $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ .

L'analyse vectorielle conjuguée aux équations de Maxwell donne :

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H} = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \vec{j} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Nous reconnaissons :

- $\frac{\partial}{\partial t}(w_e + w_m) = \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  où  $w_e$  et  $w_m$  sont respectivement les densités volumiques d'énergie électrique et magnétique.
- $\vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{\partial w_j}{\partial t}$  où  $w_j$  est la densité volumique d'énergie par effet Joule (on dit **dissipée** par effet Joule pour rappeler que cette énergie se transforme en d'autres formes que de l'énergie électromagnétique).  
 Suivant le théorème d'Ostrogradsky :  

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \wedge \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) d\tau = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \iiint_V (w_e + w_m + w_j) d\tau \right)$$
 relation qui donne l'intérêt pratique du vecteur de Poynting.

### 7. Equations de Maxwell et approximation des états quasi-stationnaires

En reprenant la démonstration des équations de propagation, on remarque que les phénomènes de propagation sont liés à l'existence du terme  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  ( $\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ).

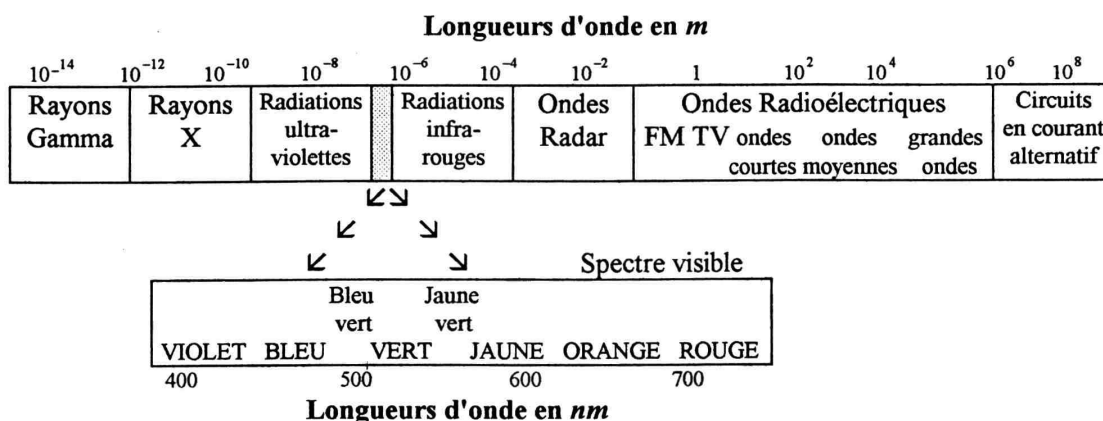
Dans le cadre de l'approximation des états quasi-stationnaires, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D} &= \rho \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \Rightarrow \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V \\ \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Par suite, la conservation de la charge devient  $\text{div } \vec{j} = 0$  : dans l'approximation des états quasi-stationnaires,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$  (la densité volumique de charges est constante ou nulle).

La relation de jauge de Lorentz devient celle de Coulomb ( $\text{div } \vec{A} = 0$ ).

### 8. Les différents types d'ondes électromagnétiques



Le domaine des longueurs d'onde inférieures à  $100 \mu m$  est communément appelée **Optique** : il étudie tout ce qui concerne la **lumière** et nécessite d'être présenté en tant que tel.

Le domaine des longueurs d'onde supérieures au centimètre est celui des ondes radio, le phénomène de propagation devenant négligeable si la longueur d'onde est grande (circuits électriques).

*Les deux problèmes intitulés " Ondes électromagnétiques non planes " et " Théorie des antennes " sont, à notre avis, indispensables pour une bonne compréhension des phénomènes de propagation des ondes électromagnétiques.*

*A travers les chapitres " La matière en présence d'un champ électrique ", " La matière en présence d'un champ magnétique " et " Les ondes électromagnétiques ", tous les fondements nécessaires à l'étude des **circuits électriques** en régime continu, en régime transitoire ou en régime forcé sont établis.*

*Outre les notions de résistances, condensateurs, selfs, coefficients d'influence mutuelle, des approfondissements sur :*

- les générateurs,*
  - les récepteurs,*
  - les diodes,*
  - les transistors,*
  - l'amplificateur opérationnel,*
  - les lois de Kirchoff (loi des noeuds, loi des mailles),*
  - les théorèmes de Thévenin, Norton et Millman,*
  - la transformation triangle-étoile,*
- s'avèrent indispensables pour aborder ces domaines de la Physique appliquée*