

## Chap. 1

### Electrostatique - Généralités

I. Introduction :.....	4
II. La charge électrique :.....	5
II.1. Caractérisation et exemples :.....	5
II.2. Propriétés :.....	6
III. Distributions de charges :.....	6
III.1. Charge ponctuelle :.....	6
III.2. Distributions de charges :.....	6
III.2.1. Distribution discrète ou discontinue :.....	6
III.2.2. Distribution continue :.....	6
III.3. Exemple de calcul de charges : .....	8

## Chap. 2

### Champ électrique – Potentiel

I. Champ électrique créé par une charge ponctuelle : .....	10
I.1. Définition :.....	10
I.2. Propriétés et caractéristiques :.....	10
I.3. Potentiel créé par une charge ponctuelle : .....	11
II. Champ créé par une distribution de charges :.....	11
II.1. Distribution discrète de charges : .....	11
II.2. Distribution continue de charges :.....	12
II.3. Applications à quelques distributions :.....	13
II.3.1. Champ et potentiel créés par une ligne infinie : .....	13
II.3.2. Champ et potentiel créés par un disque :.....	15
II.3.3. Champ et potentiel créés par un plan :.....	17
III. Lignes de champ – Equipotentiels :.....	18
IV. Energie électrostatique :.....	19
IV.1. Système de deux charges ponctuelles : .....	19
IV.2. Système de $N$ charges ponctuelles : .....	20
IV.3. Distribution continue de charges :.....	20

### Chap. 3

#### Dipôle électrostatique

I. Introduction :	22
I.1. Définition :	22
I.2. Intérêt du dipôle :	22
II. Champ et potentiel créés par un dipôle :	23
II.1. Potentiel créé à grande distance par une charge:	23
II.1.1. Principe et déroulement du calcul :	23
II.1.2. Analyse des termes :	24
II.2. Potentiel créé à grande distance par une distribution discrète :	25
II.1.1. Formulation générale :	25
II.1.2. Application au dipôle :	25
II.3. Champ électrique :	26
II.4. Lignes de champ et équipotentiellles :	26

### Chap. 4

#### Théorème de Gauss - Applications

I. Utilité du théorème de Gauss :	28
II. Théorème de Gauss :	29
II.1. Flux du champ créé par un charge ponctuelle :	29
II.2. Enoncé du Théorème :	29
II.3. Remarques :	30
III. Applications à quelques distributions :	30
II.1. Champ et potentiel créés par un plan uniformément chargé :	30
II.2. Champ et potentiel créés par un fil uniformément chargé :	31

### Chap. 5

#### Electrostatique des conducteurs

I. Conducteurs et isolants :	32
II. Champ créé par un conducteur en équilibre :	32
II.1. Equilibre électrostatique :	32
II.2. Champ et potentiel dans un conducteur en équilibre :	33

II.3. Champ au voisinage d'un conducteur : .....	34
II.3.1. Théorème de Gauss appliqué à un élément de volume : .....	34
II.3.2. Théorème de Gauss appliqué à la surface – Théorème de Coulomb:.....	35
II.3.3. Pouvoir des pointes – Applications : .....	35
II.4. Champ à l'intérieur d'une cavité dans un conducteur : .....	36
II.4.1. Extremum de la fonction potentiel : .....	36
II.4.2. Application à un conducteur creux : .....	36
II.5. Pression électrostatique : .....	37
II.5.1. Formulation : .....	37
II.5.2. Applications : .....	38
II.5.2.1. Disque sur une sphère chargée : .....	38
II.5.2.2. Eléments d'un canon à électrons : .....	38
III. Equilibre des conducteurs : .....	40
III.1. Quelques théorèmes : .....	40
III.1.1. Associations de plusieurs conducteurs : .....	40
III.1.2. Superposition d'états d'équilibre : .....	40
III.1.3. Théorème d'unicité : .....	40
III.2. Capacité d'un conducteur seul : .....	40
III.2.1. Définition : .....	40
III.2.2. Exemple : .....	41
III.3. Influence de $n$ conducteurs : .....	41
III.3.1. Exemple - L'électroscope : .....	41
III.3.2. Influence partielle – influence totale : .....	42
III.3.3. Coefficients d'influence – Capacité : .....	42
III.4. Le condensateur plan : .....	42
Annexe 1 – Pouvoir des pointes et Orages.....	43
A1.I. Le pouvoir des pointes : .....	43
A1.II. La genèse de l'orage : .....	44
A1.III. Le coup de foudre : .....	45

## Electrostatique - Généralités

### I. Introduction :

L'électromagnétisme a sa forme actuelle depuis une centaine d'années environ et, contrairement à une discipline telle que l'optique, n'a environ que 200 ans d'existence. Voici pour mémoire quelques dates et grands noms de l'histoire de l'électromagnétisme :

- ✓ 1785 – 1791 : dans sa célèbre série de sept mémoires, Coulomb va déterminer, grâce à une balance de torsion de sa conception, les lois quantitatives d'attraction électrostatiques et magnétiques qui portent son nom.
- ✓ 1827 : En étudiant les forces électromagnétiques produites par le passage du courant dans un fil, il découvre que leur intensité est proportionnelle à la longueur du conducteur. De ses recherches Ohm énonce une loi qui porte aujourd'hui son nom selon laquelle le courant électrique est égal à la tension (ou la différence de potentiel) divisée par la résistance du circuit. Avec les lois élaborées par André Ampère au même moment, la loi d'Ohm marque le premier pas vers une description théorique des phénomènes électriques.
- ✓ 1831 : Faraday découvre l'induction électromagnétique qui permettra la construction des dynamos.
- ✓ 1865 : Elaboration des célèbres équations différentielles décrivant la nature des champs électromagnétiques dans l'espace et le temps par James Clerk Maxwell. Il les expose dans son *Traité d'électricité et de magnétisme* publié en 1873. Maxwell, en élaborant les théories de l'électromagnétisme, a également défini la lumière en tant qu'onde électromagnétique, ouvrant ainsi la voie aux recherches d'autres physiciens comme Heinrich Rudolph Hertz.
- ✓ 1897 : Découverte de l'électron ("atome d'électricité") par Joseph John Thomson.
- ✓ 1904 : Détermination de la charge de l'électron par le même Thomson.

## II. La charge électrique :

### II.1. Caractérisation et exemples :

Personne ne sait ce qu'est une charge électrique. Nous savons, par contre, que certains objets microscopique portent, outre leur masse, une charge, qui va influencer les autres charges présentes. Pour mettre en évidence le côté "électrique" des objets, regardons les expériences suivantes :

- ✓ Frottons une tige de verre ou d'ambre jaune (résine fossilisée) et approchons-la d'une boule de sureau accrochée à un fil. La tige attire la boule. Une expérience un peu différente montre que les charges portées par le verre ou l'ambre après frottement sont opposées.
- ✓ Prenons deux tiges de verre frottées au préalable et mettons les en contact avec deux boules de sureau accrochée à deux fils. Les deux boules vont, après avoir éloigner les tiges, se repousser. Si, par contre, une des deux tiges est remplacée par une tige d'ambre, les deux boules vont s'attirer.

En frottant un objet sur un autre, il y a échange de charges. Un objet perd des électrons au profit de l'autre. L'objet se retrouve chargé, ou ionisé, et peut ainsi attirer ou repousser un autre objet chargé. Notons que cette action (attraction ou répulsion) peut se faire sans contact. C'est une action à distance. Nous verrons plus loin comment écrire cette action.

La charge élémentaire accessible est celle de l'électron, négative par convention, et notée  $-e$ . Sa valeur est environ  $1.609 \cdot 10^{-19}$  C. Toutes les autres charges sont des multiples entiers de la charge élémentaire. Nous dirons que la charge est **quantifiée**.

proton	+ e
positron	+ e
antiproton	- e
pion $\Pi^+$	+ e
pion $\Pi^-$	- e
kaon $K^+$	+ e
kaon $K^-$	- e

## II.2. Propriétés :

- ✓ La charge d'un système est une grandeur **extensive**, c'est à dire qu'elle est la somme algébrique de toutes les charges constituant le système. Ex : pour H,  $Q = +e - e = 0$ . Pour un métal isolé,  $Q = 0$ .
- ✓ Deux charges de mêmes signes se repoussent, deux charges de signe contraire s'attirent.
- ✓ La charge est une grandeur **conservative**. Dans un système isolé, il ne peut pas y avoir de création ou de destruction de charges. L'apparition de charges dans ce système ne peut être due qu'à l'extérieur. Une autre façon de dire la même chose est que **la charge totale contenue dans l'Univers est constante**.

## III. Distributions de charges :

### III.1. Charge ponctuelle :

Une charge est dite **ponctuelle** si elle occupe un volume dont les dimensions sont très inférieures aux distances d'observation. La charge élémentaire est une excellente approximation d'une charge ponctuelle. Un électron, par exemple, a un rayon classique de  $10^{-15}$  m, ce qui est bien sûr très grand devant les dimensions d'observation.

### III.2. Distributions de charges :

#### III.2.1. Distribution discrète ou discontinue :

Considérons  $N$  charges ponctuelles fixes dans un volume  $V$ . Ce volume est supposé suffisamment grand pour que la distance moyenne entre les charges soit très supérieure à la dimension de la charge. Nous avons affaire à une **distribution discontinue** ou **discrète** de charges.

#### III.2.2. Distribution continue :

Les calculs sont impossibles à faire en partant d'une distribution discrète car, en général, le nombre de charges est très élevé lorsque le volume est de dimension macroscopique. Dans ce cas, il faut introduire une **distribution continue de charges**.

Prenons par exemple pour fixer les idées un cube de 1 cm de côté (Figure 1), donc de volume  $V = 1\text{cm}^3$ . Découpons cette sphère en cubes de volume  $dV$  suffisamment petits pour que la distribution soit répartie uniformément dans cet élément de volume. Prenons maintenant un cube  $10^{12}$  fois plus petit que le cube principal. Dans le volume  $V$ , il y a environ

$10^{22}$  atomes, il y en a donc  $10^{10}$  dans le volume  $dV$ . Cette quantité est encore énorme dans ce si petit volume, mais voyons qu'elle est la charge élémentaire contenue dans  $dV$ .

$$dq = n e = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{10} = 1.6 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

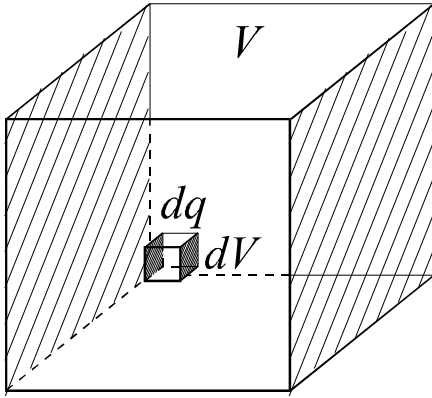


Figure 1

La quantité de charge est donc très petite à l'échelle macroscopique. Nous la considérerons encore comme ponctuelle. Par contre, les charges étant nombreuses dans  $dV$ , les distances entre les charges seront supposées nulle à notre échelle. Nous parlerons de **distribution continue de charges**.

Introduisons la densité volumique de charges  $\rho$ , c'est à dire la quantité de charges contenue dans une unité de volume ( $1 \text{ m}^3$ ).

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

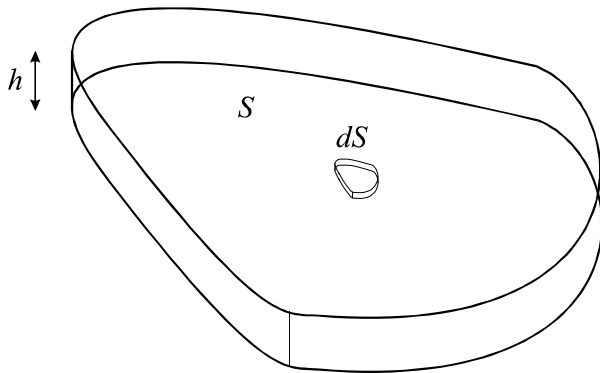


Figure 2

Il se peut qu'une des trois dimensions soit très petite devant les deux autres. Dans ce cas, le volume sera assimilé à une surface (Figure 2), la hauteur  $h$  étant une quantité infiniment petite.

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{dq}{hdS}$$

La quantité  $\frac{dq}{dS}$  est notée  $\sigma$  et est appelée **densité superficielle** ou **surfaccique de charges**.

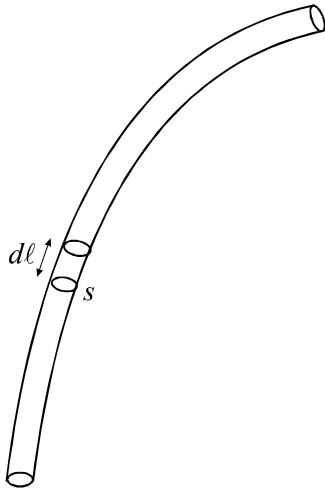


Figure 3

Prenons maintenant un fil électrique de très petite section  $s$  (Figure 3). La densité volumique de charge s'écrit :  $\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{dq}{Sdl}$ .

La quantité  $\frac{dq}{dl}$  est notée  $\lambda$  et est appelée

**densité linéaire** ou **linéique de charges**.

### III.3. Exemple de calcul de charges :

Soit une sphère de rayon  $R$  dont la répartition des charges n'est pas uniforme :

$$\rho = \rho_o \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \text{ si } r \leq R$$

$$\rho = 0 \text{ si } r > R$$

La Figure 4 montre la forme de la répartition. Elle est maximum au centre, décroît lorsque  $r$  croît pour atteindre 0 en  $r = R$ .

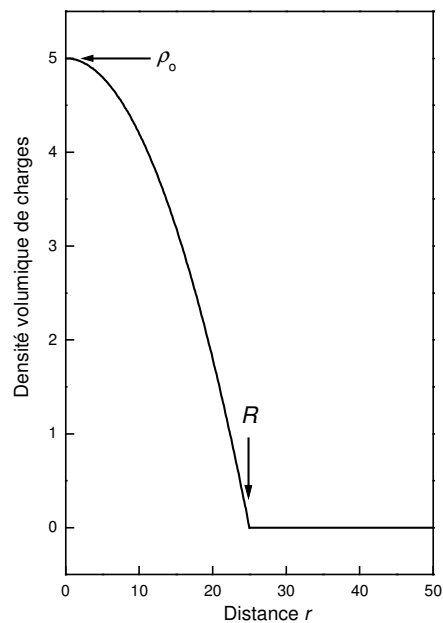


Figure 4



Calculons la charge totale dans la sphère :

Découpons la sphère en éléments de volume infiniment petits dans lesquels la densité volumique  $\rho$  est constante. Il suffit de prendre des couronnes sphériques (Figure 6) de rayon compris entre  $r$  et  $r + dr$ . Le volume de cette couronne est  $dV = 4\pi r^2 dr$ . La charge contenue dans  $dV$  est  $dq = \rho dV = 4\pi\rho r^2 dr = 4\pi\rho_o \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r^2 dr$ . Pour trouver la charge totale, il faut additionner toutes les charges élémentaires dues à toutes les couronnes sphériques, donc intégrer  $dq$  entre 0 et  $R$ .

$$q = 4\pi\rho_o \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r^2 dr = 4\pi\rho_o \int_0^R \left(r^2 - \frac{r^4}{R^2}\right) dr$$

$$= 4\pi\rho_o \left[ \frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{5} \right] = \frac{8}{15} \pi R^3 \rho_o$$

$$q = \frac{8}{15} \pi R^3 \rho_o$$

Si  $\rho$  était uniforme, et égal à  $\rho_o$ , la charge  $q_o$  serait le produit de  $\rho_o$  par le volume total

$V = \frac{4}{3} \pi R^3$ , ce qui donnerait :

$$q_o = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_o$$

Le rapport  $q/q_o$  est :

$$\frac{q}{q_o} = \frac{2}{5}$$

## Champ électrique - Potentiel

### I. Champ électrique créé par une charge ponctuelle :

#### I.1. Définition :

Nous avons vu dans le chapitre précédent que deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$  exercent une influence l'une sur l'autre. La force qui s'exerce sur  $q_2$  due à  $q_1$  est :

$$\vec{F}_1(2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_r$$

Cette expression peut être mise sous une forme un peu différente :

$$\vec{F}_1(2) = q_2 \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_1}{r_{12}^2} \vec{u}_r \right)$$

La force est fonction d'une quantité (entre parenthèses) qui ne dépend que de la charge  $q_1$ . Cette quantité est appelée **champ électrique** créé par  $q_1$  en un point quelconque de l'espace et est notée  $\vec{E}$  :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_r$$

#### I.2. Propriétés et caractéristiques :

Les propriétés sont identiques à celles du champ de gravitation créé par une masse ponctuelle. Rappelons les points principaux :

✓ Le champ  $\vec{E}_q(M)$  créé en  $M$  par une charge fixe située en un point  $O$  est un vecteur porté par  $OM$  (Figure 1). Si  $q > 0$ ,  $\vec{E}_q(M)$  a le même sens que  $\vec{OM}$ . Il est donc dirigé "vers l'extérieur". Si  $q < 0$ ,  $\vec{E}_q(M)$  a bien sûr le sens contraire.

✓ Le champ a une portée infinie.

✓ Le champ n'est pas défini en  $r = 0$ , ce qui se comprend puisqu'une charge n'est jamais ponctuelle dans la réalité. De plus, lorsque deux charges, telles que deux protons par exemple, sont proches l'une de l'autre, des forces de nature différente interviennent,

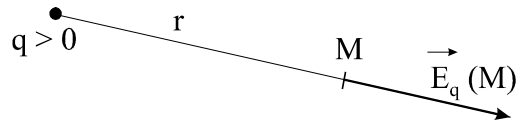


Figure 1

✓ La quantité  $\epsilon_0$  est appelée permittivité du vide. Avec une bonne approximation,  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ .

### I.3. Potentiel créé par une charge ponctuelle :

Le potentiel créé par une charge ponctuelle  $q$  au point  $M$  est :

$$V_q(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Contrairement au champ électrique, le potentiel est une grandeur scalaire. Remarquons que, comme dans le cas de la gravitation,  $E = -dV/dr$ . De façon plus générale, en coordonnées cartésiennes,

$$\vec{E} \left( -\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

De manière plus concise,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

## II. Champ créé par une distribution de charges :

### II.1. Distribution discrète de charges :

Considérons  $N$  charges ponctuelles fixes. Prenons un point  $M$  quelconque non situé sur les charges. Le champ total  $\vec{E}(M)$  est la somme vectorielle de toutes les contributions dues à chacune des charges (Figure 2) :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_{q_i}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

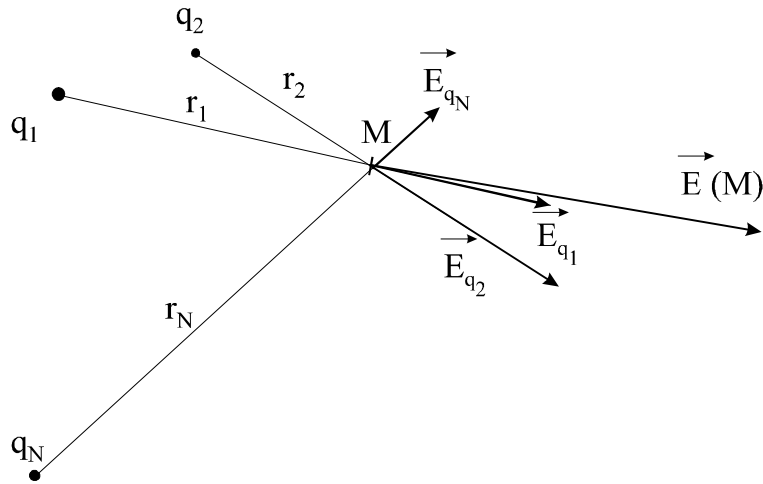


Figure 2

De même, le potentiel total créé par toutes les charges en  $M$  est la somme de tous les potentiels individuels.

$$V(M) = \sum_{i=1}^N V_{q_i}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}$$

Malheureusement, ces relations ne sont pas utilisables à cause du nombre trop élevé de charges. L'astuce est de passer d'une distribution discrète à une distribution continue de charges.

### II.2. Distribution continue de charges :

Soit  $\mathcal{V}$  un volume contenant une charge totale  $Q$  (Figure 3). Chaque charge crée un champ en tout point  $M$  de l'espace. Mais, comme nous l'avons vu précédemment, il est hors de question de calculer chaque contribution individuelle pour en faire la somme. Nous allons découper le volume en éléments de volume  $d\mathcal{V}$ , chacun de ces volumes contenant une charge élémentaire  $dq$  répartie uniformément :  $dq = \rho d\mathcal{V}$ . Chaque charge  $dq$  est suffisamment petite pour être considérée comme ponctuelle, donc le champ créé par  $dq$  en  $M$  est :

$$\overrightarrow{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \overrightarrow{u_r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho d\mathcal{V}}{r^2} \overrightarrow{u_r}$$

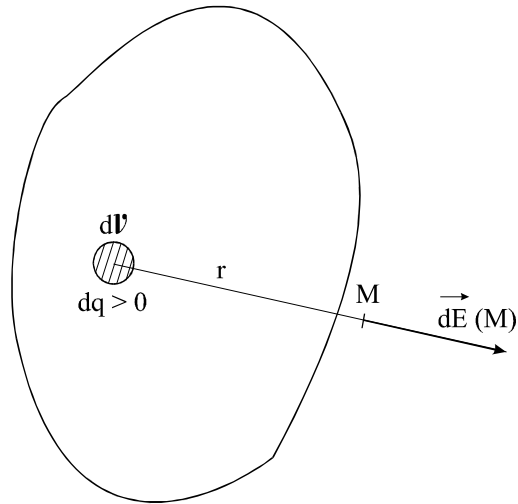


Figure 3

Le champ total est :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho d\mathcal{V}}{r^2} \vec{u}_r$$

Le raisonnement adopté pour une distribution volumique de charges est le même pour une distribution surfacique ou linéique :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}_r$$

### II.3. Applications à quelques distributions :

Toutes ces applications sont traitées en TD, nous ne donnerons donc que les résultats les plus importants, ainsi que la méthode à utiliser pour résoudre le problème.

#### II.3.1. Champ et potentiel créés par une ligne infinie :

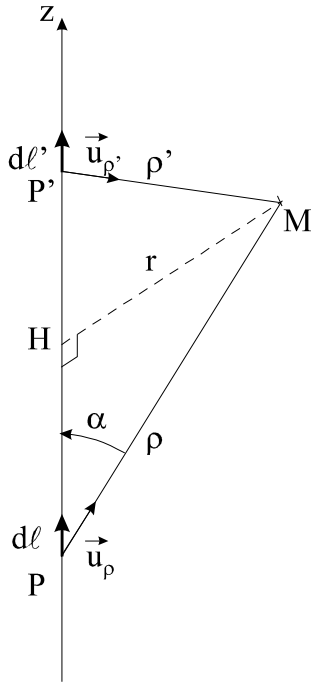


Figure 4

Soit une ligne infinie de section négligeable, et portant une charge linéique uniforme  $\lambda$ . Le but de l'exercice est de calculer le champ électrique et le potentiel en tout point  $M$  de l'espace.

Comme nous l'avons indiqué dans le cours, il faut découper la ligne en petits éléments de ligne  $d\ell$ , chacun de ces éléments portant une charge  $dq$ . Le champ créé par la charge en  $P$  au point  $M$  est :

$$\overrightarrow{dE}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{\rho^2} \overrightarrow{u}_\rho$$

Prenons le symétrique  $P'$  de  $P$  par rapport à  $H$ .

Le champ créé par la charge en  $P$  au point  $M$  est :

$$\overrightarrow{dE}_{P'}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell'}{\rho'^2} \overrightarrow{u}_{\rho'}$$

Le champ créé par ces deux charges est :

$$\overrightarrow{dE}(M) = \overrightarrow{dE}_{P'}(M) + \overrightarrow{dE}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{\rho^2} \overrightarrow{u}_\rho + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell'}{\rho'^2} \overrightarrow{u}_{\rho'}$$

Or  $\rho = \rho'$ ,  $d\ell = d\ell'$ ,  $\overrightarrow{u}_\rho = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$  et  $\overrightarrow{u}_{\rho'} = \frac{\overrightarrow{PM'}}{PM'}$

$$\text{Donc } \overrightarrow{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{\rho^2} \left( \frac{\overrightarrow{PM}}{PM} + \frac{\overrightarrow{PM'}}{PM'} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{\rho^3} (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'}) = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{\rho^3} \overrightarrow{HM}$$

Cette dernière relation montre que le champ est orthogonal au fil, et ne dépend que de  $r$ .

La norme de  $\overrightarrow{dE}(M)$  est  $dE(M) = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{\rho^3} \|\overrightarrow{HM}\| = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{\rho^3} r$ . Cette relation comporte 3

variables dépendantes,  $r$ ,  $d\ell$  et  $\rho$ . La norme du champ total est ici la somme des normes, puisque tous les vecteurs  $\overrightarrow{dE}(M)$  ont même direction et même sens.

Pour calculer cette norme, nous allons effectuer un changement de variable, et mettre  $r$ ,  $d\ell$  et  $\rho$  en fonction de l'angle  $\alpha$ . Dans le triangle rectangle  $HMP$  :

$$\cos \alpha = \frac{HP}{PM} = \frac{z}{\rho} \text{ si l'on prend l'origine des } z \text{ en } H.$$

$$\sin \alpha = \frac{HM}{PM} = \frac{r}{\rho} \quad \tan \alpha = \frac{HM}{HP} = \frac{r}{z}$$

$$d\ell = dz = \frac{-r}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

$$dE = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{\sin^2 \alpha} d\alpha r \frac{\sin^3 \alpha}{r^3}$$

$$dE = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \sin \alpha d\alpha$$

L'intégration est facile, mais il faut faire attention aux bornes. Nous devons intégrer sur une moitié de ligne, donc entre 0 et  $\pi/2$ .

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cos \alpha \Big|_0^{\pi/2}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

Le potentiel se déduit aisément en prenant une primitive de  $E$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + V_0$$

La constante est indéterminée puisque lorsque  $r$  tend vers l'infini,  $V$  tendant vers 0 conduit à une constante infinie. Cette indétermination est due essentiellement à l'approximation de la ligne infinie.

### II.3.2. Champ et potentiel créés par un disque :

Champ et potentiel créé par un disque :

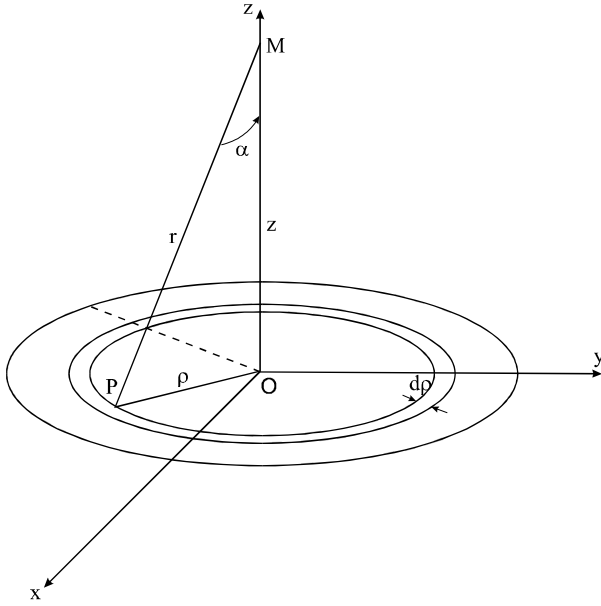


Figure 5

Un disque de rayon  $R$  est chargé en surface. La densité surfacique de charges est  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ). Nous nous proposons de calculer le champ électrique et le potentiel créés par cette distribution, en un point  $M$  de l'axe  $(Oz)$ .

Pour cela, décomposons le disque en anneaux de rayon  $\rho$  et de largeur  $d\rho$ . Soit  $P$  un point de l'anneau et  $P'$  le symétrique de  $P$  par rapport à  $O$ .

Les champs créés par les charges en  $P$  et  $P'$  au point  $M$  sont :

$$\overrightarrow{d^2 E_P}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma d^2 S}{r^3} \overrightarrow{PM}$$

$$\overrightarrow{d^2 E_{P'}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma d^2 S}{r^3} \overrightarrow{P'M}$$

Le champ créé par ces deux charges est :

$$\overrightarrow{d^2 E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma d^2 S}{r^3} (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{P'M}) = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma d^2 S}{r^3} \overrightarrow{OM} \text{ avec } d^2 S = \rho d\rho d\theta$$

Le champ est colinéaire à  $(Oz)$ .

La norme est  $d^2 E(M) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho d\rho d\theta}{r^3} z$ . Une 1<sup>ère</sup> intégration peut être effectuée sur  $\theta$ .

$$dE(M) = \frac{\pi\sigma}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho d\rho}{r^3} z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\rho d\rho}{r^3} z.$$

En faisant intervenir l'angle  $\alpha$ , comme dans l'exercice 1, il vient :

$$dE = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \sin \alpha d\alpha, \text{ d'où } E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cos \alpha \Big|_0^{\alpha_{\max}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha_{\max})$$

$$\text{avec } \cos \alpha_{\max} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$



$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{u}_z$$

Le potentiel  $V(M)$  est obtenu par intégration de  $E$  :

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( z - \sqrt{R^2 + z^2} \right)$$

Attention, le calcul a été effectué uniquement pour les  $z$  positifs. Les figures 6 et 7 donnent l'allure du champ et du potentiel.

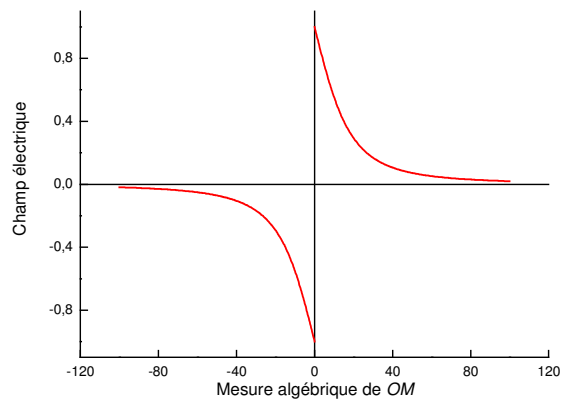


Figure 6

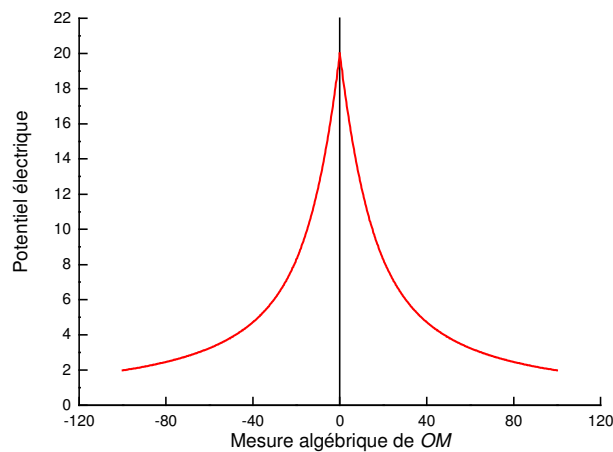


Figure 7

### II.3.3. Champ et potentiel créés par un plan :

Le calcul du champ créé par un plan infini sera détaillé en TD. Cependant, il peut être déterminé en peu de lignes, à partir des résultats précédents. En effet, un plan infini peut être

considéré soit comme un disque de rayon infini, soit comme un disque de rayon  $R$ , à condition toutefois de prendre des points  $M$  très près de ce disque. Dans les deux cas, nous trouvons :

$$\vec{E}(M) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$$

Le potentiel est

$$V(M) = \mp \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + cte$$

La constante est encore une fois indéterminée. Cependant, l'indétermination est dans la plupart des cas contournée, comme nous le verrons dans le chapitre sur les condensateurs.

### III. Lignes de champ - Equipotentielles :

Reprenons le cas le plus simple d'une charge ponctuelle  $q$ , créant un champ électrique en tout point de l'espace, et dessinons quelques vecteurs  $\vec{E}$  (Figure 8).

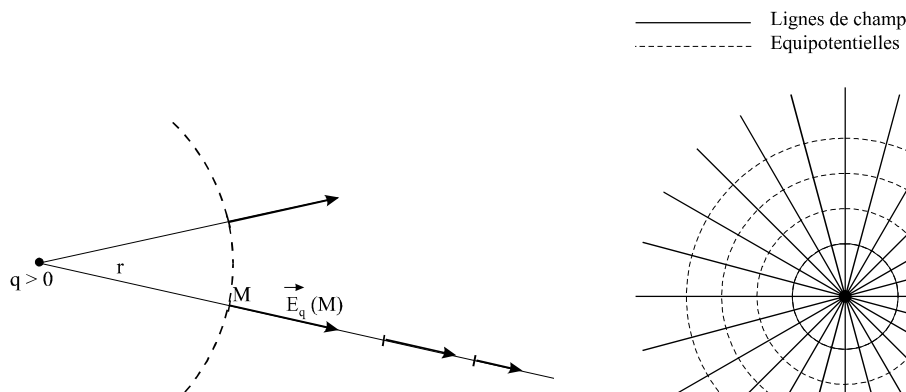


Figure 8

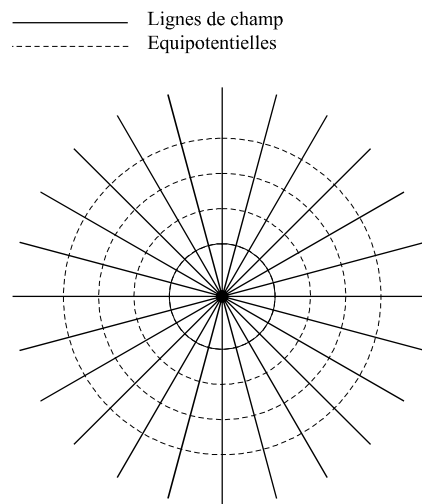


Figure 9

La droite  $(OM)$  est appelée **ligne de champ**. C'est la courbe dont chaque vecteur  $\vec{d\ell}$  est colinéaire au champ :

$$\vec{d\ell} \wedge \vec{E} = \vec{0}$$

Les lignes (ou surfaces) de mêmes potentiels sont appelées **lignes** (ou **surfaces**) **équipotentiels**, ou encore **équipotentiels**. Les équipotentiels sont perpendiculaires aux lignes de champ.

Ces courbes sont essentielles à connaître, par exemple dans le cas de la conduite de particules chargées. Sachant que ces particules vont suivre les lignes de champ, et que la géométrie d'un appareil expérimental n'est pas parfait, les lignes de champ peuvent être rapidement inextricables, compliquant de ce fait le mouvement des particules.

#### IV. Energie électrostatique :

##### IV.1. Système de deux charges ponctuelles :

Une charge  $q_1$  est supposée être au repos et fixe dans toute la durée de l'expérience. Une 2<sup>ème</sup> charge  $q_2$  est amenée (Figure 10) de l'infini à une distance  $a$  de  $q_1$ . Supposons que les deux charges soient positives. Comme  $q_1$  et  $q_2$  ont tendance à se repousser mutuellement, il faut fournir une énergie  $E_U$  pour approcher  $q_2$  de  $q_1$ . Le travail  $dW(\vec{F})$  de la force électrostatique en un point quelconque entre les états initial ( $i$ ) et final ( $f$ ) est :

$$dW(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = +F dx$$

car  $dx$  est négatif et  $dW$  est résistant.

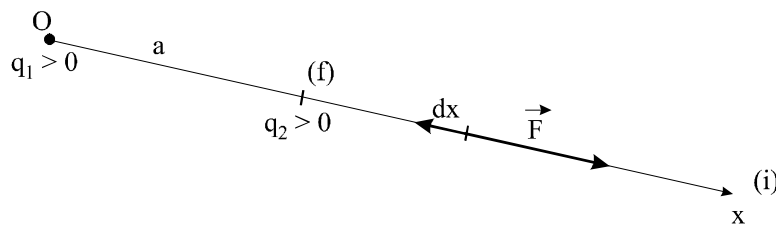


Figure 10

$$\text{L'énergie potentielle du système est } dE_p = -dW = -F dx = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} dx$$

$$E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x}$$

Il existe une relation simple entre la force et l'énergie :

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p$$

La relation  $E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x}$  peut aussi se mettre sous la forme  $E_p = q_1 V_2 = q_2 V_1 = \frac{1}{2}(q_1 V_2 + q_2 V_1)$ .

#### IV.2. Système de $N$ charges ponctuelles :

Pour calculer l'énergie électrostatique d'un système de  $N$  charges ponctuelles, il faut approcher chaque charge jusqu'à la distance que l'on souhaite. L'énergie potentielle de ce système est l'opposé du travail de toutes les forces.

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_i V_j$$

Le facteur  $1/2$  s'explique encore une fois par le fait que nous comptons deux fois le couple  $q_i q_j$  dans la sommation.

#### IV.3. Distribution continue de charges :

Dans le cas d'une distribution continue de charges, il suffit de remplacer le signe somme discrète par une intégrale. Comme dans le cas d'une distribution discontinue, il faut introduire le facteur  $1/2$ .

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \rho V d\mathcal{V}$$

Attention, contrairement à la distribution discontinue de charges, pour laquelle le potentiel  $V_j$  est le potentiel créé par toutes les charges sauf  $q_i$ , le potentiel  $V$  est ici créé par toutes les charges.

Prenons le cas d'une sphère de rayon  $R$  chargée en volume, de densité uniforme  $\rho$ . La charge totale de la sphère est  $Q$ . Le champ à l'intérieur est  $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$ , et le potentiel a pour

expression  $V = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - 3R^2)$  (le calcul du champ et du potentiel sera vu au Chap. 4).

L'énergie électrostatique du système est :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^R \rho \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) 4\pi r^2 dr$$
$$= \frac{\pi\rho^2}{3\epsilon_0} \left( \frac{3R^5}{3} - \frac{R^5}{5} \right) = \frac{4}{15} \frac{\rho^2}{\epsilon_0} R^5$$

Cette expression peut être mise en fonction de  $Q$  sachant que  $Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$ . Il vient :

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R}$$

## Le Dipôle Electrostatique

### I. Introduction :

#### I.1. Définition :

Un **dipôle électrostatique** est constitué de deux charges opposées, séparées d'une distance  $d = 2a$  très petite devant les distances d'observation (Figure 1).

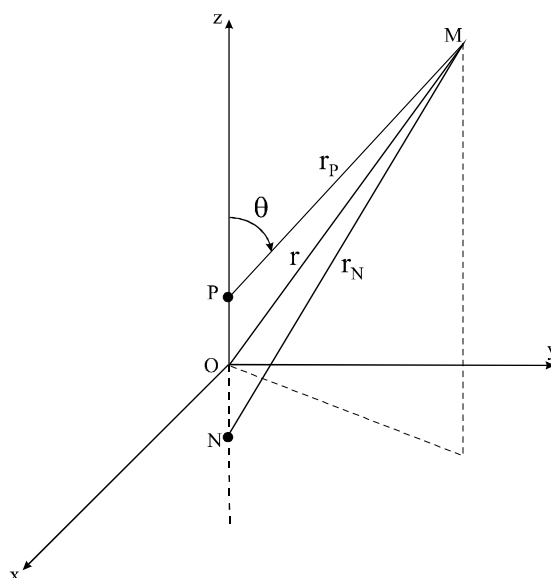


Figure 1

En toute première approximation, puisque  $M$  est très loin des charges,  $M$  voit un système neutre, puisque la charge totale est nulle, donc un champ nul. En fait, le champ n'est pas nul, car  $M$  voit en toute rigueur deux charges.

La quantité vectorielle  $q\vec{d}$  avec  $\vec{d} = \overrightarrow{PN}$  est notée  $\vec{p}$  et est appelée **moment dipolaire**. Nous verrons plus loin que ce moment intervient dans l'expression du potentiel et du champ.

#### I.2. Intérêt du dipôle :

Si un atome, qui est constituée d'une charge positive et d'une charge négative, a un moment dipolaire nul, il n'en va pas de même de certaines molécules, telles que  $\text{H}_2\text{O}$  ou  $\text{HCl}$ , qui ont un **moment dipolaire permanent** (*i.e.* en l'absence de toute cause extérieure) non nul. Un champ électrique aura ainsi une influence sur la molécule.

Par exemple, une expérience simple consiste à prendre un matériau électrisé, par exemple une règle frottée au préalable, et de l'approcher d'un mince filet d'eau. Celui-ci, à proximité de la règle, sera légèrement dévié.

## II. Champ et potentiel créés par un dipôle :

### II.1. Potentiel créé à grande distance par une charge:

#### II.1.1. Principe et déroulement du calcul :

Soit  $q_i$  une charge quelconque en un point  $A_i$ , et un point  $M$  très éloigné de  $A_i$  (Figure 2). Prenons un repère quelconque centré en  $O$ .

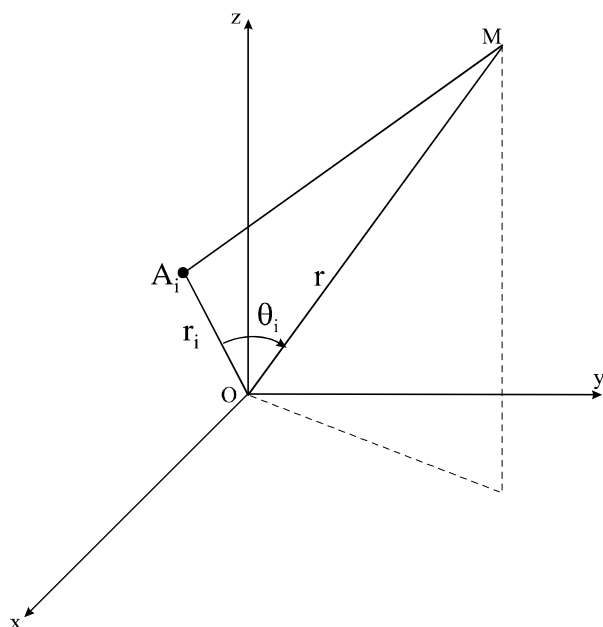


Figure 2

Le potentiel créé au point  $M$  par la charge  $q_i$  s'écrit :

$$V_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{A_iM}$$

Dans le triangle  $OA_iM$ , la distance  $A_iM$  vaut :

$$A_iM = (r_i^2 + r^2 - 2r_i r \cos \theta_i)^{1/2}$$

Le potentiel devient :

$$V_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{(r_i^2 + r^2 - 2r_i r \cos \theta_i)^{1/2}}$$

ou encore

$$V_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{q_i}{\left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} - \frac{2r_i \cos \theta_i}{r}\right)^{1/2}}$$

A très grande distance,  $r$  devient très supérieur à  $q_i$ , la quantité  $u = \frac{r_i^2}{r^2} - \frac{2r_i \cos \theta_i}{r}$  tend vers 0. Nous pouvons donc effectuer un développement de  $(1+u)^{-1/2}$  au voisinage de  $u = 0$ . Pour ne pas alourdir le calcul, nous nous limiterons à l'ordre 2 en  $r$ .

$$(1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2} \left( -\frac{3}{2} \right) \frac{u^2}{2!} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + o(u^3)$$

donc

$$I = \left( 1 + \frac{r_i^2}{r^2} - \frac{2r_i \cos \theta_i}{r} \right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r_i^2}{r^2} - \frac{2r_i \cos \theta_i}{r} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{r_i^2}{r^2} - \frac{2r_i \cos \theta_i}{r} \right)^2 + o(u^3)$$

En ne gardant que les termes du 2<sup>nd</sup> ordre en  $r$ , nous obtenons :

$$I = 1 - \frac{1}{2} \frac{r_i^2}{r^2} + \frac{r_i \cos \theta_i}{r} + \frac{3}{2} \frac{r_i^2 \cos^2 \theta_i}{r^2} + o(r^3)$$

Le potentiel devient :

$$V_i(M) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{r_i^2}{r^2} + \frac{r_i \cos \theta_i}{r} + \frac{3}{2} \frac{r_i^2 \cos^2 \theta_i}{r^2} \right) =$$

$$V_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i r_i \cos \theta_i}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i r_i^2}{r^3} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \theta_i \right) = V_i^0 + V_i^1 + V_i^2$$

### II.1.2. Analyse des termes :

Nous avons gardé dans l'expression du potentiel 3 termes. Le terme  $V_i^0$  est le potentiel créé par une charge qui se trouverait en  $O$ . Autrement dit, à l'ordre 0, le potentiel créé par une charge située en un point proche de  $O$  est identique au potentiel créé par une charge qui se trouverait en  $O$ . Les termes  $V_i^1$  et  $V_i^2$  sont des **termes correctifs**, à l'ordre 1 et à l'ordre 2 respectivement. Nous remarquons que ces deux termes varient en  $1/r^2$  et  $1/r^3$ , donc décroissent plus vite que le 1<sup>er</sup>. Ces deux termes sont donc plus efficaces à plus petite distance.

Nous voyons que les termes  $V_i^1$  et  $V_i^2$  font intervenir la quantité  $q_i r_i$ . Cette quantité est la norme du moment dipolaire  $\vec{p}_i = q_i \vec{r}_i$ .



## II.2. Potentiel créé à grande distance par une distribution discrète :

### II.1.1. Formulation générale :

Le potentiel créé à grande distance par une distribution discrète de charges s'obtient en sommant toutes les contributions individuelles :

$$V(M) = \sum_{i=1}^N V_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^N q_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^N q_i r_i \cos \theta_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^N q_i r_i^2 \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \theta_i \right)$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$V(M) = V_o(M) + V_1(M) + V_2(M)$$

avec

$$V_o(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^N q_i$$

$$V_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^N q_i r_i \cos \theta_i$$

$$V_2(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^N q_i r_i^2 \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \theta_i \right)$$

$V_o(M)$  est le terme unipolaire ou monopolaire,  $V_1(M)$  le terme dipolaire,  $V_2(M)$  le terme quadrupolaire. Si la distribution de charge est au total nulle, comme c'est le cas d'un atome ou d'une molécule non ionisée, seuls subsistent les contributions multipolaires.

### II.1.2. Application au dipôle :

Revenons au dipôle. Le terme monopolaire est nul, puisque la somme des charges est nulle. Si l'on néglige les termes d'ordre supérieurs à 2, il reste la contribution dipolaire. Les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont supplémentaires, donc  $\cos \theta_1 = -\cos \theta_2$ . Mais, comme  $q_1 = -q_2 = q$ , le produit  $q_i \cos \theta_i$  est constant. Le potentiel devient donc :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qd \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa \cos\theta}{r^2}$$

ou encore

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2}$$

si nous faisons intervenir le vecteur unitaire  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$ .

### II.3. Champ électrique :

Le champ créé par un dipôle se déduit facilement de l'expression de  $V$  par la relation

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M) = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta :$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos\theta}{r^3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^2}$$

$$\text{Nous en déduisons } \vec{E} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos\theta}{r^3}, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3} \right)$$

### II.4. Lignes de champ et équipotentielles :

Comme cela a été dit dans le chapitre sur la gravitation, les lignes de champ suivent le champ. Si  $\vec{d\ell}$  est un élément de cette ligne de champ, alors son équation est donnée par  $\vec{d\ell} \wedge \vec{E} = \vec{0}$ . Les coordonnées de  $\vec{d\ell}$  sont  $dr$  et  $rd\theta$ . Nous obtenons donc une équation scalaire :

$$\frac{p \sin\theta}{r^3} dr - \frac{2p \cos\theta}{r^3} rd\theta = 0$$

ou encore

$$\frac{dr}{r} = 2 \frac{d \sin\theta}{\sin\theta}$$

Nous obtenons une équation différentielle à variables séparées, qui se résout donc sans problème :

$$\ln r = 2 \ln \sin \theta + A = \ln \sin^2 \theta + A$$

$$r = C \sin^2 \theta$$

Les lignes de champ, ainsi que les équipotentiels, sont représentées sur la Figure 3.

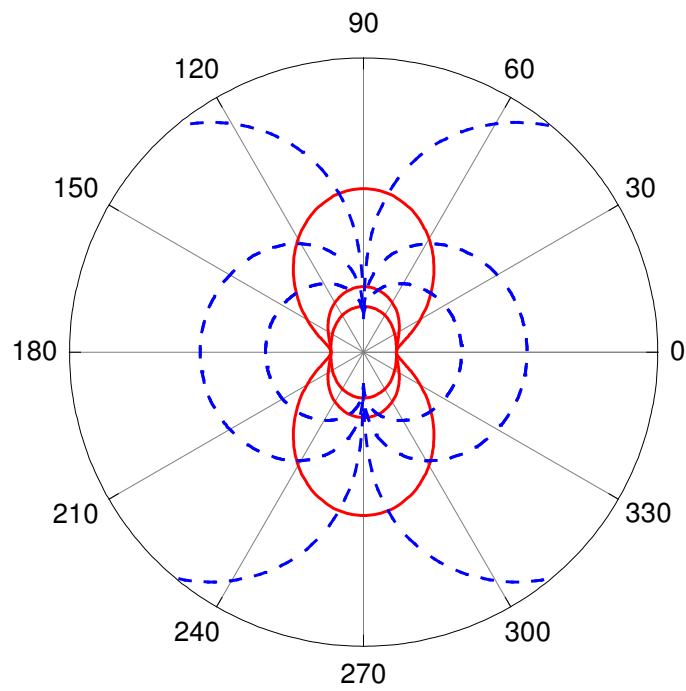


Figure 3

Chap. 4

## Théorème de Gauss - Applications

### I. Utilité du théorème de Gauss :

Nous nous trouvons dans une situation pour le moins inextricable. Les situations réelles sont les plus difficiles à exploiter, pour lesquelles un calcul littéral du champ est la plupart du temps impossible. Seules les méthodes numériques peuvent arriver à résoudre des problèmes réels. Prenons l'exemple, apparemment simple, d'une plaque rectangulaire, chargée uniformément en surface. Nous connaissons le champ créé par les charges de la plaque en un point  $M$  très proche de la plaque. Ce point voit un plan infini, le champ est donc  $\sigma/2\epsilon_0$ . Par contre, en un point quelconque, loin de la plaque, ou près des bords, nous ne savons pas calculer le champ. Il faut vraiment supposer la plaque infinie pour résoudre le problème.

Quelles sont les situations les plus simples ? Ce sont les situations qui possèdent des symétries : un axe de symétrie, un plan de symétrie. Et encore, toutes les symétries ne donnent pas une situation exploitable : le disque uniformément chargé possède un axe de symétrie, pourtant nous ne pouvons calculer le champ que sur cet axe.

En fait, les objets qui possèdent des symétries et qui induisent des situations littéralement exploitables sont peu nombreux : le parallélépipède, la sphère, la ligne, et le plan. En dehors de ces objets, il faut avoir recours à des méthodes numériques, donc à l'informatique. Cependant, dans les cas les plus simples, nous n'utiliserons pas la relation

$\vec{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r$ , mais le théorème de Gauss, qui est un outil très puissant car il donne

une solution rapidement.

## II. Théorème de Gauss :

### II.1. Flux du champ créé par un charge ponctuelle :

Soit  $q$  une charge ponctuelle positive. Le champ créé par  $q$  en un point  $M$  est

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r. \text{ Prenons une surface } \Sigma \text{ (Figure 1) entourant la charge, et pour simplifier,}$$

prenons une sphère. Le flux du champ  $\vec{E}$  à travers la sphère s'écrit :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

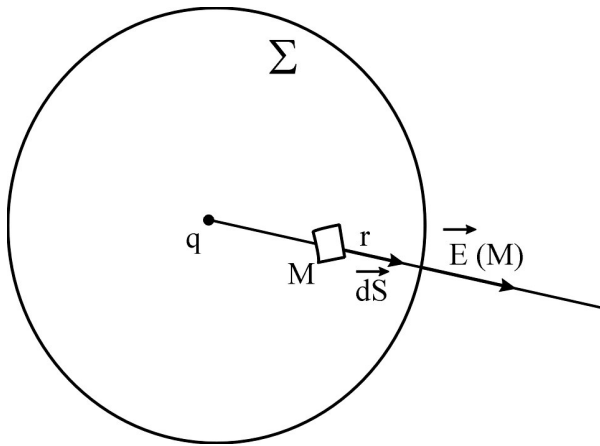


Figure 1

Le champ électrique a une direction particulière : il est radial. Donc  $\vec{E}$  et  $\vec{dS}$  ont

la même direction.  $\Phi = \oiint_{\Sigma} E dS$ . De plus, la

norme de  $\vec{E}$  est constante sur la sphère, puisqu'elle ne dépend que de  $r$ . Nous pouvons donc sortir  $E$  de l'intégrale :

$$\Phi = E \oiint_{\Sigma} dS = ES = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} 4\pi r^2$$

Finalement, le flux se réduit à une valeur simple :

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

A  $\epsilon_0$  près, le flux de  $\vec{E}$  à travers  $\Sigma$  est égale à la charge contenue dans  $\Sigma$ .

### II.2. Enoncé du Théorème :

Ce que nous avons établi au paragraphe précédent est généralisable :

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque (appelée surface de Gauss) est égal, au facteur  $1 / \epsilon_0$  près, à la somme de toutes les charges intérieures à cette surface.

### II.3. Remarques :

✓ Dans le § 1, nous avons calculé le flux à partir de la connaissance de  $\vec{E}$ . Par la suite, le but du théorème de Gauss sera de déterminer  $\vec{E}$  par l'intermédiaire du flux.

✓ Le choix de la surface de Gauss est crucial. Toutes ne conviennent pas, comme nous le verrons dans les applications.

✓ Prenons une distribution quelconque de charges, et une surface de Gauss ne contenant pas la distributions. Dans ce cas, le flux du champ est nul, ce qui ne veut pas dire que le champ créé par cette distribution est nul/

### III. Applications à quelques distributions :

#### II.1. Champ et potentiel créés par un plan uniformément chargé :

Soit un plan chargé en surface, de densité superficielle de charges  $\sigma$  (Figure 2). Le champ  $\vec{E}$  créé en un point  $M$  est orthogonal au plan. De plus, en un point de cote  $z$ ,  $E$  ne dépend ni de  $x$  ni de  $y$ , puisque le plan est infini.

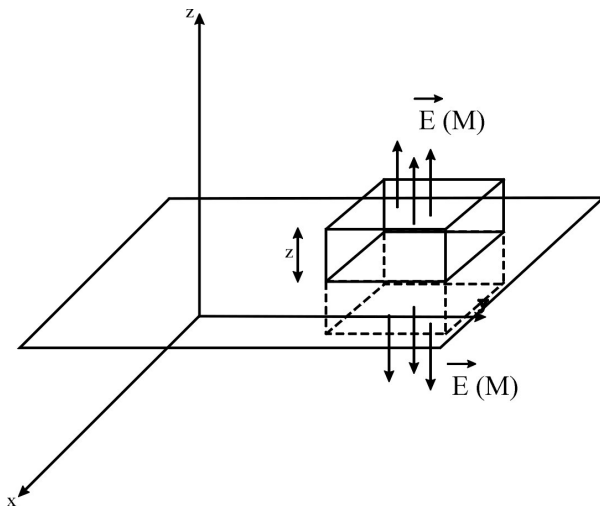


Figure 2

Une forme simple de surface de Gauss est le parallélépipède rectangle. Prenons un parallélépipède de hauteur  $2z$  et de surface de base  $S$ .

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint_{\text{Surfaces latérale}} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \oiint_{\text{Bases}} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Sur la surface latérale, le flux est nul puisque le champ est le vecteur surface sont orthogonaux. Il reste donc le flux sur les surfaces de bases :

$$\Phi = \oiint_{\text{Bases}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = 2ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

Nous retrouvons la relation que nous avons démontré au chap. 3 :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

## II.2. Champ et potentiel créés par un fil uniformément chargé :

Le champ créé par un fil est radial, et ne dépend que de  $r$ . La surface la plus judicieuse est un cylindre, dont les surfaces de base ont un rayon  $r$ , et de hauteur  $h$ .

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\text{Surface latérale}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oiint_{\text{Bases}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\text{Surface latérale}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES = E2\pi rh = Q_{\text{int}} / \epsilon_0$$

La charge intérieure est  $Q_{\text{int}} = \lambda h$  donc

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Chap. 5

## Electrostatique des conducteurs

### I. Conducteurs et isolants :

Un conducteur est un matériau qui contient des charges électriques mobiles. Dans un métal, ces charges sont les électrons les moins liés. Les ions du métal restent fixes. Dans une solution électrolytique par contre, ce sont les ions qui bougent.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu des distributions de charges linéiques, surfaciques et volumiques. Ces dernières sont ne possibles qu'avec des isolants. Comme nous le verrons, un métal n'accepte pas de charges en volume.

### II. Champ créé par un conducteur en équilibre :

#### II.1. Equilibre électrostatique :

Avant de parler d'équilibre électrostatique, regardons la différence entre un conducteur neutre et un conducteur auquel des charges supplémentaires sont apportées (conducteur chargé). Un conducteur neutre a une charge globale nulle. De plus, si l'on prend un volume très petit dans ce conducteur, la charge dans ce petit volume (appelée aussi charge locale) est nulle. Dans le cas d'un conducteur chargé, *a priori*, il en va autrement puisque des charges ont été apportées. Nous allons voir dans la suite où vont ces charges.

Un conducteur est en équilibre électrostatique si aucun courant macroscopique n'existe à l'intérieur de ce conducteur.



## II.2. Champ et potentiel dans un conducteur en équilibre :

Si les porteurs de charges sont fixes, la force qui s'exerce sur un des porteurs de charge, et due aux autres porteurs, est nulle. Le champ créé par les autres porteurs est donc nul. Finalement, le champ créé par un conducteur en équilibre électrostatique à l'intérieur de ce conducteur est nul, ce qui se résume ainsi :

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$$

De plus, il ne peut y avoir de charges libres à l'intérieur du conducteur. En effet, supposons qu'il y ait une distribution volumique à l'intérieur, et prenons une surface de Gauss proche de cette distribution, située à l'intérieur. Alors le flux du champ électrique n'est pas nul, donc le champ n'est pas nul, ce qui est contradictoire avec  $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$ . Par conséquent toutes les charges libres migrent vers la surface. Ceci est vrai en particulier pour les charges qui seraient apportées de l'extérieur vers le conducteur (Figure 2).

$$\rho_{\text{int}} = 0$$

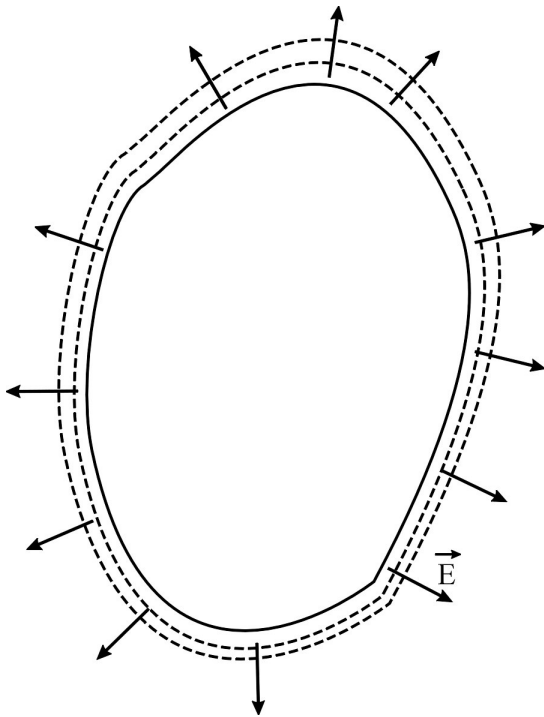


Figure 1

Il s'ensuit que le potentiel est constant à l'intérieur. Il est donc constant sur la surface. La surface est une équipotentielle. Par conséquent, le champ est orthogonal à la surface (Figure 1).

En pointillés sont indiquées deux équipotentielles, orthogonales aux lignes de champ.

Pour résumer, prenons pour fixer les idées un morceau de cuivre. Le Cu a un noyau, des électrons très liés, et d'autres très peu liés, qui se meuvent librement. Dire que la charge locale est nulle quand il n'y a pas d'apport extérieur de charges revient donc à dire que même les électrons peu liés ne vont pas à la surface, mais restent dans le conducteur. Ils sont répartis uniformément dans le volume. Par contre les électrons supplémentaires que l'on apporte vont, eux, se mettre sur la surface (Figure 2).

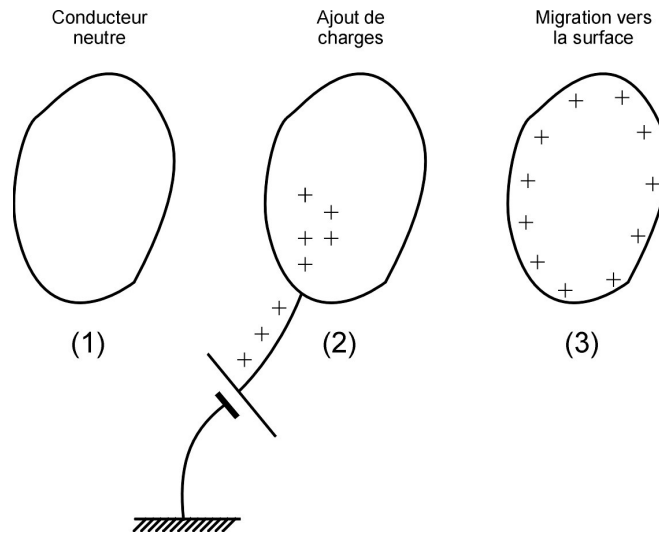
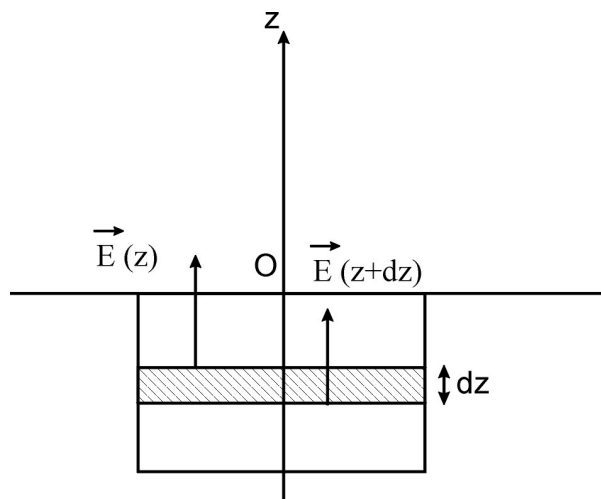


Figure 2

### II.3. Champ au voisinage d'un conducteur :

#### II.3.1. Théorème de Gauss appliqué à un élément de volume :

(Cette partie n'est pas à donner aux étudiants de 1<sup>ère</sup> année de Deug.)



Prenons un élément de volume  $\Delta V$  du conducteur proche de sa surface (Figure 3). Cet élément de volume a une épaisseur  $a$  et une surface  $S$  très petite. La charge volumique de cet élément  $\Delta V$  est  $\rho(z)$  et dépend donc de l'épaisseur.

La charge  $\Delta Q$  contenue dans  $\Delta V$  est :

Figure 3

$$\Delta Q = \int \rho(z) d\mathbf{V} = \int_{-a}^0 \rho(z) S dz = S \int_{-a}^0 \rho(z) dz$$

L'intégrale ci-dessus n'est autre que la densité superficielle de charge  $\sigma$ , à condition de prendre une épaisseur  $a$  aussi petite que possible.

Supposons maintenant que le champ créé par cette distribution soit orthogonal à la surface, et calculons ce champ en appliquant le théorème de Gauss entre les cotes  $z$  et  $z + dz$  :

$$\phi = -E(z + dz)S + E(z)S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho S dz}{\epsilon_0}$$

$$\text{or } -E(z + dz)S + E(z)S = -dES$$

$$\text{d'où } E = \int dE = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

### II.3.2. Théorème de Gauss appliqué à la surface - Théorème de Coulomb:

Appliquons le théorème de Gauss à la surface du conducteur :

$$\phi = ES - 0 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

d'où

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

$\vec{n}$  étant un vecteur normal à la surface.

La relation ci-dessus constitue le théorème de Coulomb.

### II.3.3. Pouvoir des pointes - Applications :

Prenons deux sphères de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$ , avec  $R_1 > R_2$ , et reliées par un fil. Ces deux sphères sont au même potentiel, puisqu'elles constituent un conducteur unique

(cf. § II.2.). Or le potentiel et le champ créés par une sphère sont respectivement  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$

et  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$ . Il existe donc une relation simple entre  $E$  et  $V$  :  $E = V/R$ . Les potentiels  $V_1$  et  $V_2$  étant égaux, le champ créé par la plus petite sphère est plus intense que celui créé par la grande sphère. A la limite,  $E$  peut devenir très grand quand  $R$  tend vers 0. C'est cette caractéristique que l'on appelle pouvoir des pointes (cf. Annexe 1).

## II.4. Champ à l'intérieur d'une cavité dans un conducteur :

### II.4.1. Extremum de la fonction potentiel :

La fonction potentiel n'admet pas d'extremum (ni maximum ni minimum) en dehors des charges. Pour le montrer, prenons un point  $M$  en dehors des charges et supposons qu'en ce point le potentiel est maximum. Prenons maintenant une petite sphère centrée en  $M$ . Puisque les lignes de champ suivent les potentiels décroissants, le champ sort de la sphère. D'après le théorème de Gauss,  $\Phi = \oiint_{\Sigma} E dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ . Le flux n'étant pas nul, la charge intérieure n'est pas nulle. Ceci signifie qu'en  $M$ , il y a une charge, ce qui est contraire à l'hypothèse.

### II.4.2. Application à un conducteur creux :

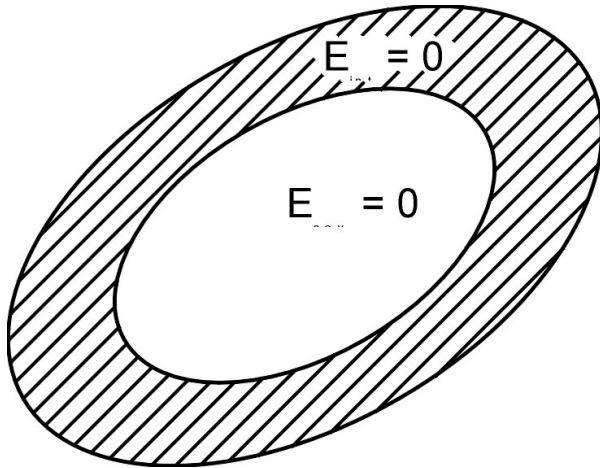


Figure 4

Un conducteur creux, de surfaces extérieure et intérieure respectives  $S_{\text{ext}}$  et  $S_{\text{int}}$  entoure un volume dans lequel il n'y a aucune charge (Figure 4).

Entre  $S_{\text{ext}}$  et  $S_{\text{int}}$  le champ est nul. Que vaut le champ  $E_{\text{cav}}$  dans la cavité ? La surface intérieure est une équipotentielle. De plus, le potentiel n'a ni minimum, ni maximum, en dehors des charges.

Donc le potentiel dans la cavité est le même dans la cavité que sur  $S_{\text{int}}$ . Finalement, il n'existe pas de gradient de potentiel, ce qui signifie que le champ est nul.

$$E_{\text{cav}} = 0$$

Un objet situé à l'intérieur d'une cavité chargée ne subit pas le potentiel du conducteur, quelque soit ce potentiel.

## II.5. Pression électrostatique :

### II.5.1. Formulation :

Reprenons le cas simple d'une sphère chargée en surface, avec une densité superficielle de charges  $\sigma > 0$ . Les charges étant à la surface, elles ont tendance à vouloir s'en échapper. Prenons une charge  $q$  en particulier. Cette charge subit l'influence des charges à proximité. La force  $\vec{F}$  qui s'exerce sur  $\Delta q$  due aux autres charges est :

$$\vec{F} = \Delta q \vec{E}_a$$

$\vec{E}_a$  étant le champ créé par toutes les charges sauf  $q$ .

Supposons que  $\Delta q$  n'est pas une charge ponctuelle, mais une charge répartie sur un morceau de surface  $\Delta S$  du conducteur (Figure 5).

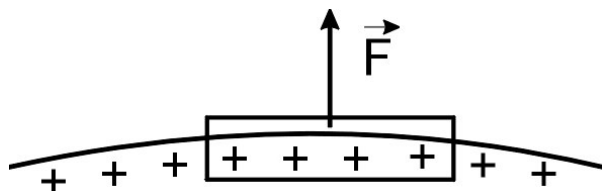


Figure 5

$$\Delta q = \sigma \Delta S$$

Le champ créé par toutes les charges est :

$$\vec{E}_t = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

Le champ créé par la charge  $\Delta q$  au voisinage  $M$  de la surface est, si l'on considère que  $\Delta S$  est infinie, vue de  $M$  :

$$\vec{E}_{\Delta q} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

$$\vec{E}_a = \vec{E}_t - \vec{E}_{\Delta q} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

$$\text{d'où } \vec{F} = \Delta q \vec{E}_a = \Delta q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} = \sigma S \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} = S \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

Le rapport  $F/S$  est la pression qui s'exerce sur la paroi. Nous en déduisons :

$$p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

## II.5.2. Applications :

### II.5.2.1. Disque sur une sphère chargée :

Sur une sphère de rayon  $R$ , mise au potentiel  $V$ , posons un petit disque de masse  $m$  et de rayon  $r$ . Le but est ici d'évaluer le potentiel à appliquer pour que le disque se soulève. Les forces qui s'exercent sur le disque sont les forces électrostatiques  $\vec{F}$  et son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ . Le

disque se soulèvera si  $F > mg$ , donc si  $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} s > mg$  avec  $s = \pi r^2$ . Le potentiel sur la sphère est

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma S}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}. \quad \text{L'inégalité devient } \frac{V^2 \epsilon_0^2}{2\epsilon_0 R^2} \pi r^2 > mg \quad \text{ou encore}$$

$$V^2 > \frac{mg 2R^2}{\pi r^2 \epsilon_0}.$$

$$V > \frac{R}{r} \sqrt{\frac{2mg}{\pi\epsilon_0}}$$

En prenant  $R/r = 10$ ,  $m = 1\text{g}$ , on trouve  $V > 270000\text{ V}$

### II.5.2.2. Eléments d'un canon à électrons :

Le canon à électrons est constitué de 3 parties :

- La cathode (le filament), qui émet des électrons (Figure 6).
- 

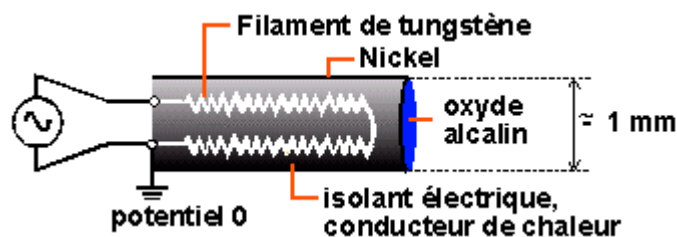


Figure 6

- Le cylindre de Wehnelt qui l'entoure (Figures 7 et 8). Le Wehnelt est porté à un potentiel négatif, réglable. Il a pour but, avec l'anode, de concentrer les électrons émis (à faible vitesse) de la cathode en un point A situé entre l'anode et le Wehnelt. L'anode, mise à un potentiel positif, attire aussi les électrons. Les électrons, repoussés par le pourtour du Wehnelt, se concentrent plus ou moins au point A.

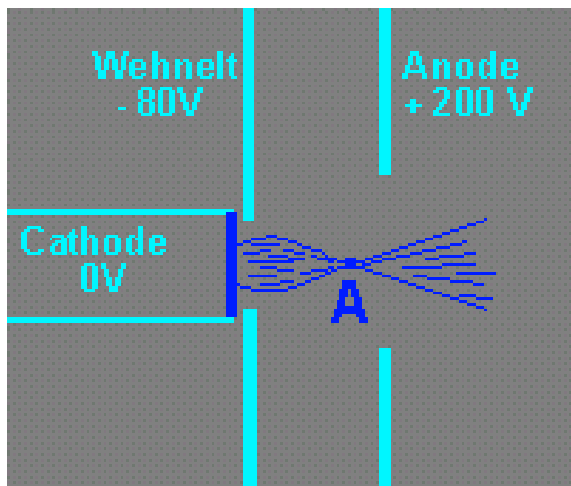


Figure 7

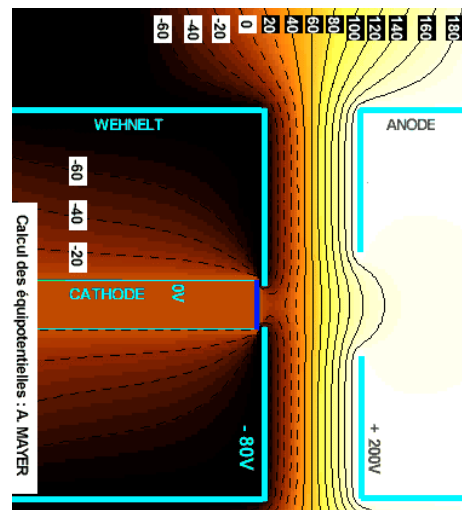


Figure 8

- La lentille électrostatique (Figures 9 et 10) formée par l'anode accélératrice suivie de deux autres électrodes.

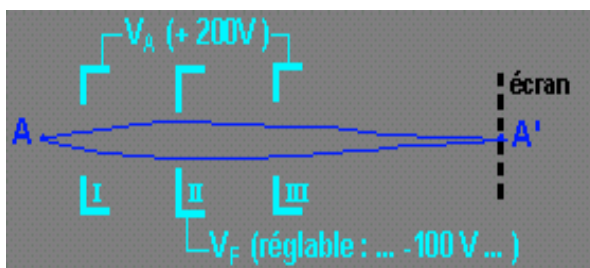


Figure 9

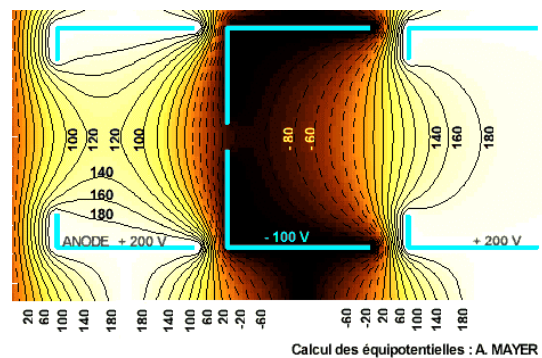


Figure 10

Tous ces éléments sont conçus pour conduire le faisceau et le rendre le plus fin possibles. Malgré tout, le faisceau peut frapper ces éléments conducteurs, ainsi que d'autres éléments, conducteurs ou isolants (vis par exemple). Ceux-ci peuvent donc se charger, et induire soit

des claquages, soit des déformations des lignes de champ qui viennent perturber la trajectoire que l'on souhaite.

### III. Equilibre des conducteurs :

#### III.1. Quelques théorèmes :

##### III.1.1. Associations de plusieurs conducteurs :

Considérons  $n$  conducteurs, le conducteur  $(i)$  étant porté au potentiel  $V_i$ . Chaque conducteur étant en équilibre,  $V_i = \text{cte}$ . Dans ce cas, les  $n$  conducteurs forment un système en équilibre électrostatique.

##### III.1.2. Superposition d'états d'équilibre :

Supposons que deux états d'équilibre soit possible pour un ensemble de conducteurs, caractérisés par les potentiels  $V_1$  et  $V_2$ . Alors tout état caractérisé par un potentiel  $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2$  est encore un état d'équilibre.

##### III.1.3. Théorème d'unicité :

Si l'on connaît pour un ensemble de conducteurs à l'équilibre :

- ✓ soit les potentiels de tous les conducteurs.
- ✓ soit les charges de tous les conducteurs.
- ✓ soit les potentiels de certains conducteurs, et les charges de tous les autres.

alors l'état d'équilibre de ces conducteurs est parfaitement déterminé.

### III.2. Capacité d'un conducteur seul :

#### III.2.1. Définition :

Soit un conducteur portant une charge  $Q$  et dont le potentiel est  $V$  :

$$Q = \int \sigma dS$$

$$V = \int \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r}$$



Supposons qu'au lieu de  $\sigma$ , la densité de charges soit  $\sigma = a\sigma$ . Alors la charge et le potentiel deviennent :

$$Q' = \int \sigma' dS = aQ$$

$$V' = \int \frac{\sigma' dS}{4\pi\epsilon_0 r} = aV$$

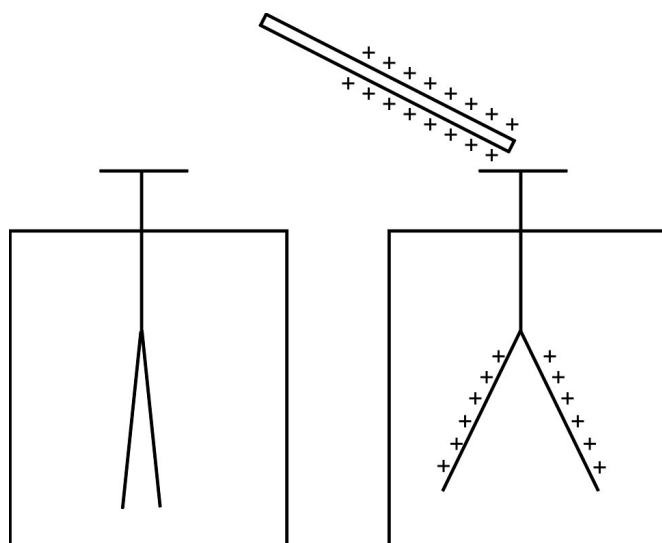
Le rapport  $Q/V$  est constant. Notons  $C$  ce rapport. Cette quantité est appelée **capacité du conducteur**. Elle est toujours positive et ne dépend que de la géométrie du conducteur. L'unité est le Farad (F).

### III.2.2. Exemple :

Une sphère de rayon  $R$  a en surface une charge  $Q$ , induisant un potentiel  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ . La capacité de la sphère est  $C = 4\pi\epsilon_0 R \approx 10^{-11} R$ . Nous voyons par cet exemple que les capacités sont très faibles. Les unités les plus courantes sont donc le nF ou le  $\mu\text{F}$ .

### III.3. Influence de $n$ conducteurs :

#### III.3.1. Exemple - L'électroscope :



Un électroscope est essentiellement constitué de deux tiges très minces, reliées à une surface métallique (Figure 11). Approchons un objet chargé, positivement par exemple, comme l'indique la figure. Les tiges s'écartent. En effet, la charge positive attire les charges négatives. Les tiges se chargent donc positivement et s'écartent puisque les charges sont de même signe. Le

phénomène se produit bien sûr si la charge est négative.

Figure 11

Eloignons l'objet chargé. Les deux tiges reviennent à leur position d'équilibre initiale. Nous dirons que l'objet a influencé l'électroscope. Ceci dit, à cause des charges sur l'électroscope, celui-ci va influencer l'objet. Nous parlerons **d'influence mutuelle**.

### III.3.2. Influence partielle - influence totale :

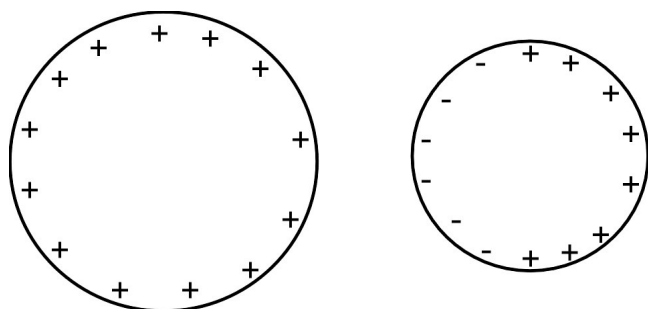


Figure 12

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux sphères.  $S_1$  est chargée positivement,  $S_2$  est neutre initialement. Approchons  $S_1$  de  $S_2$  sans la toucher (Figure 12). Par influence, les charges négatives de  $S_2$  vont s'agglutiner sur la face la plus proche de  $S_1$ . Il restera donc des charges négatives du côté opposé. L'influence est **partielle**.

La figure n'est pas tout à fait représentative de ce qui se passe en réalité, car la sphère  $S_1$  va aussi être influencée par  $S_2$ , et sa répartition de charges changera.

### III.3.3. Coefficients d'influence - Capacité :

### III.4. Le condensateur plan :

## Annexe 1 - Pouvoir des pointes et Orages

### A1.I. Le pouvoir des pointes :

Les premiers expérimentateurs de l'électricité avaient remarqué qu'il est presque impossible de charger un corps conducteur muni d'une pointe effilée, comme si le fluide électrique fuyait par cette pointe. De même, un corps chargé devant lequel on présente une pointe effilée mise à la terre se décharge rapidement.

Ce phénomène est accompagné d'une lueur bleuâtre. On sait maintenant que ce phénomène est dû à des avalanches électroniques consécutives à une ionisation de l'air, se produisant lorsque le champ électrique dépasse un seuil d'environ 30 kV / cm (*potentiel disruptif*). Les *feux de Saint Elme* remarqués par les marins sont la manifestation du même phénomène.

Ce **pouvoir des pointes** s'explique par la déformation du champ électrique au voisinage des aspérités, qui concentrent les lignes de force du champ. Cette concentration dépend de la **géométrie** de l'aspérité, et les charges se concentrent dans les régions de **forte courbure**. Ainsi, le champ au voisinage d'une demi-sphère posée sur un plan au potentiel de la terre est le triple du champ à grande distance de la demi-sphère. Pour une aspérité plus pointue,

comme un ellipsoïde allongé, le coefficient multiplicateur du champ peut atteindre quelques milliers.

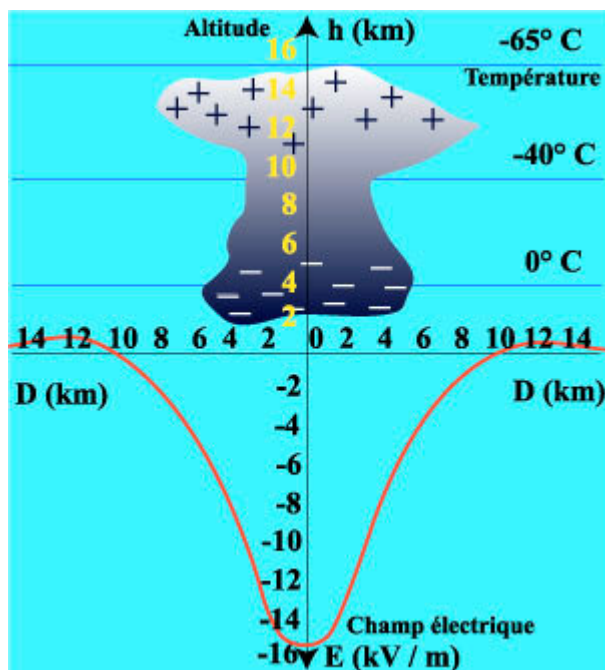
### A1.II. La genèse de l'orage :

Les phénomènes orageux prennent naissance dans des nuages en forme d'enclume, se développant sur une très grande hauteur, pouvant atteindre 15 km, les **cumulo-nimbus**. Constitués d'eau à leur base, leur sommet est formé de particules de glace. Le nuage se forme sous l'effet de courants ascendants violents qui se créent lorsque des masses d'air d'humidité et de température différentes se rencontrent. Il peut aussi se former un orage de chaleur, lorsque le sol est très chaud, et que l'humidité de l'air est élevée. Un cumulo-nimbus peut aspirer des kilomètres-cube d'air chaud et humide et il peut contenir des centaines de milliers de tonnes d'eau.

Le cumulo-nimbus est le siège de phénomènes violents: des courants ascendants et descendants peuvent atteindre des vitesses de 20 m/s. Il est aussi le siège de **phénomènes électriques** : les particules d'eau qui le constituent se congèlent lorsqu'elles atteignent l'isotherme 0°C. Les particules de glace s'élèvent et se rassemblent au sommet du nuage, alors que les gouttelettes d'eau restent à la base.

Il semble que les chocs violents entre cristaux leur arrachent des électrons, ce qui conduit à une charge électrique positive au sommet du nuage, et les gouttes d'eau de la base se chargent négativement.

La physique de ce phénomène de séparation des charges n'est pas encore élucidée de manière satisfaisante : il est possible aussi que les changements de phase de l'eau produisent une électrisation...



Quoi qu'il en soit, les différentes parties du nuage sont électriquement chargées. La **surface terrestre** sous le nuage est chargée positivement, du fait de l'influence électrostatique du nuage. Il apparaît donc un **champ électrique** sous le nuage. Lorsque la différence de potentiel entre les parties électriquement chargées devient trop importante, il y a décharge. C'est le **coup de foudre**, l'**éclair** en est la manifestation optique et le **tonnerre** la manifestation acoustique. La décharge peut se produire entre régions du nuage, ou entre le nuage et la terre. Lorsque le champ électrique au sol sous le nuage atteint 10 à 15 kV / m, on peut dire qu'une décharge est imminente.

### A1.III.Le coup de foudre :

Lorsque le champ électrique atteint un seuil critique, la **décharge** a lieu. Une étude de l'éclair montre qu'une première décharge de faible intensité se produit. C'est le **traceur**, qui progresse par bonds en zigzags à environ 200 km/s, jusqu'à ce qu'il rencontre un obstacle élevé. Un **traceur ascendant** peut également se développer à partir du sol, lorsque des obstacles plus ou moins conducteurs sont soumis à un champ électrique suffisamment élevé pour qu'une ionisation se produise. Lorsque les traceurs se rejoignent, il se forme un **canal ionisé**, par lequel la décharge proprement dite s'effectue. La longueur de ce canal peut aller de 100 m à plusieurs km. La température de l'air dans ce canal peut atteindre  $30\,000^{\circ}\text{C}$ , et la différence de potentiel entre le nuage et le sol peut aller jusqu'à 100 millions de volts. Plusieurs décharges successives dans le même canal peuvent se produire.

Le **tonnerre** lui-même est produit par l'expansion des gaz entourant le canal et causée par la décharge, qui peut porter ces gaz à plusieurs dizaines de milliers de degrés.