Chapitre IV Fonctions d'ondes moléculaires Molécules diatomiques

1. Hamiltonien moléculaire et approximations classiques

1.1. Hamiltonien moléculaire

L'hamiltonien moléculaire \hat{H} se compose de la somme des opérateurs associés aux différentes formes d'énergie des particules dont les positions relatives sont repérées à l'aide des paramètres de la Fig. 1. Les noyaux de masse M_K et de numéro atomique Z_K sont indicés 1, 2, ...K, ...L,et les électrons sont 1,2, ...a,...b,....



Figure 1. Paramètres repérant les distances des particules constituant une molécule.

On distingue les termes suivants :

- énergie cinétique des électrons ; chaque laplacien agit sur les coordonnées d'un électron *a* :

$$\hat{T}_e = -\frac{1}{2} \sum_a \Delta(a)$$

- énergie cinétique des noyaux

$$\hat{T}_N = -\frac{1}{2M_K} \sum_{K} \Delta(K)$$

_

- énergie potentielle d'interaction noyaux-électrons :

$$\hat{V}_{Ne} = \sum_{K,a} - \frac{Z_K}{r_{Ka}}$$

- énergie potentielle d'interaction électrons-électrons ; la condition a > b dans la sommation évite de compter deux fois la même interaction avec r_{ab} et avec r_{ba} .

$$\hat{V}_{ee} = \sum_{b>a} - \frac{1}{r_{ab}}$$

- énergie potentielle d'interaction noyau-noyau :

$$\hat{V}_{NN} = \sum_{L>K} \frac{Z_K Z_L}{R_{KL}}$$

Les approximations suivantes seront faites afin de faciliter la recherche de solutions *approchées* de l'équation de Schrödinger, le calcul de solutions exactes étant impossible.

1.2 Approximation de Born-Oppenheimer

Comme les noyaux sont de l'ordre d'au moins 2000 fois plus lourds que les électrons, ils sont beaucoup plus lents : on pourra donc calculer la fonction électronique en les supposant immobiles. Il en résulte que $\hat{T}_{NN} = 0$ et que \hat{V}_{NN} est constant, pour une géométrie moléculaire donnée.

1.3 Approximation orbitale

Comme on l'a détaillé au chapitre III, on prendra a priori la fonction d'onde multiélectronique sous la forme de produits (antisymétrisés sous la forme d'un déterminant de Slater) de fonctions monoélectroniques ou orbitales. C'est l'obtention de ces *orbitales moléculaires* (OM) qui fera l'objet de ce chapitre et des chapitres V et VI.

1.4. Méthode C.L.O.A.

Ces orbitales moléculaires seront prises a priori sous la forme de *combinaisons linéaires* d'orbitales atomiques (C.L.O.A. ou en anglais LCAO). Ici encore, comme on ne sait pas calculer de manière exacte les orbitales moléculaires, on part des seules orbitales connues, celles de l'atome d'hydrogène, adaptées par approximation à tous les autres atomes. On considère qu'au voisinage d'un noyau, la fonction d'onde ressemble à celle de l'atome isolé correspondant ; une fonction moléculaire globale Ψ doit donc ressembler à un « mélange » de toutes les orbitales atomiques ϕ_i et s'écrit donc :

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i$$

Les Ψ peuvent être considérés comme des vecteurs d'un espace dont l'ensemble des *n* orbitales atomiques utilisées consitue la *base*. Cette base est choisie en fonction de la qualité du calcul souhaitée :

- si l'on recherche un haut degré d'approximation, cette base pourra être constituée de l'ensemble des OA, incluant donc tous les électrons.

- cependant, comme les orbitales atomiques « profondes » sont relativement peu modifiées dans la molécule, on se limitera ici aux orbitales des couches de valence, au nombre de 4 par atome du groupe principal (C, N, O, S, P etc.) et 1 par hydrogène. Ainsi, la base d'OA est de dimension 6 pour H₂O, de dimension 12 pour l'éthylène. Cette approximation est utilisée dans la *méthode de Hückel généralisée*.

Lors de l'étude des molécules conjuguées, cette base pourra même être réduite à la seule OA de chaque atome participant au système π . Cette approximation est utilisée dans la *méthode de Hückel* simple.

Les coefficients *c_i* sont calculés par la *méthode des variations* (Chapitre III § 1.3).

2. Principe du calcul C.L.O.A. variationnel des orbitales moléculaires

On considère des orbitales atomiques ϕ_l et ϕ_2 , supposées réelles comme c'est généralement le cas en pratique, appartenant respectivement à deux atomes 1 et 2. Les *orbitales moléculaires* (OM) sont de la forme :

$$\Psi = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2$$

L'énergie moyenne E d'un électron décrit par cette fonction est donnée par le postulat de la mécanique quantique

$$E = \frac{\left\langle \Psi \middle| \hat{H} \middle| \Psi \right\rangle}{\left\langle \Psi \middle| \Psi \right\rangle}$$

Soit

$$\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle - E \langle \Psi | \Psi \rangle = 0$$

Selon la méthode des variations, Ψ est optimale quand E est minimal d'où les conditions nécessaires

$$\frac{\partial E}{\partial c_1} = \frac{\partial E}{\partial c_2} = 0 \tag{1}$$

La première donne une première équation :

$$\frac{\partial}{\partial c_1} \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle - \frac{\partial E}{\partial c_1} \langle \Psi | \Psi \rangle - E \frac{\partial}{\partial c_1} \langle \Psi | \Psi \rangle = 0$$

soit, avec (1):

$$\frac{\partial}{\partial c_1} \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle - E \frac{\partial}{\partial c_1} \langle \Psi | \Psi \rangle = 0$$
⁽²⁾

En remplaçant Ψ par son expression, les deux brackets s'écrivent :

$$\begin{split} \left\langle \Psi \left| \hat{H} \right| \Psi \right\rangle &= \left\langle c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 \left| \hat{H} \right| c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 \right\rangle = c_1^2 \left\langle \phi_1 \left| \hat{H} \right| \phi_1 \right\rangle + c_1 c_2 \left\langle \phi_1 \left| \hat{H} \right| \phi_2 \right\rangle + c_1 c_2 \left\langle \phi_2 \left| \hat{H} \right| \phi_1 \right\rangle + c_2^2 \left\langle \phi_2 \left| \hat{H} \right| \phi_2 \right\rangle \\ \left\langle \Psi \left| \Psi \right\rangle &= \left\langle c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 \left| c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 \right\rangle = c_1^2 \left\langle \phi_1 \left| \phi_1 \right\rangle + 2 c_1 c_2 \left\langle \phi_1 \left| \phi_2 \right\rangle + c_2^2 \left\langle \phi_2 \left| \phi_2 \right\rangle \right\rangle \\ \end{split}$$

Tous les brackets figurant dans cette expression sont des intégrales définies, donc des *nombres*. On notera H_{ij} les intégrales du type $\langle \phi_i | \hat{H} | \phi_j \rangle$ et S_{12} l'intégrale $\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle$. En raison de l'hermiticité de \hat{H} , $H_{12} = H_{21}$; avec des fonctions atomiques réelles, $S_{12} = S_{21}$. En outre, $S_{11} = S_{22} = 1$ si les fonctions atomiques sont normées, ce que l'on supposera ; on conservera

cependant ces grandeurs sous leur forme littérale dans le calcul qui suit pour l'homogénéité de l'écriture. La signification physique et l'évaluation de ces intégrales seront abordées plus loin. La dérivation selon l'équation (2) donne alors :

$$2c_1H_{11} + 2c_2H_{12} - E(2S_{11} - 2S_{12}) = 0$$

Soit

$$c_1(H_{11} - ES_{11}) + c_2(H_{12} - ES_{12}) = 0$$

La dérivation par rapport à c_2 donne une deuxième équation, soit finalement le système permettant le calcul de c_1 et c_2 :

$$c_{1}(H_{11} - ES_{11}) + c_{2}(H_{12} - ES_{12}) = 0$$

$$c_{1}(H_{12} - ES_{12}) + c_{2}(H_{22} - ES_{22}) = 0$$
(3)

Ce système homogène admet la solution évidente, et dépourvue d'intérêt, $c_1 = c_2 = 0$. Pour qu'il en existe d'autres, il faut que le déterminant du système soit nul :

$$\begin{vmatrix} H_{11} - ES_{11} & H_{12} - ES_{12} \\ H_{12} - ES_{12} & H_{22} - ES_{22} \end{vmatrix} = 0$$
(4)

Cette condition se traduit par une équation du second degré en *E* dont les solutions sont E_1 et E_2 . En reportant E_1 dans le système (3) un on obtient une première solution¹ c_{11} et c_{21} , donc une fonction d'onde Ψ_1 d'énergie E_1 . On reporte ensuite E_2 dans le système (3), ce qui fournit une deuxième solution c_{12} et c_{22} et une fonction Ψ_2 d'énergie E_2 .

On admettra que ces résultats se généralisent à un système comportant un nombre quelconque *n* d'orbitales atomiques. Les *n* coefficients c_i satisfont au système de *n* équations dont la $j^{\text{ème}}$ a pour expression :

$$\sum_{i} c_i (H_{ij} - ES_{ij}) = 0$$

La condition d'existence de solutions non nulles est que le déterminant associé soit nul :

$$\left|H_{ij} - ES_{ij}\right| = 0$$

Cette équation fournit *n* valeurs E_k de l'énergie : à chacune de ces valeurs correspond un ensemble c_{ik} et donc une fonction d'onde Ψ_k . On remarquera qu'avec une base de *n* OA, on obtient *n* OM et *n* niveaux d'énergie.

¹ Les solutions du système (3) ne sont définies qu'à une constante multiplicative près qui est déterminée par la condition de normalisation de Ψ_1 et Ψ_2 .

3. Approximations de Hückel des intégrales

Trois types de paramètres interviennent dans le système (3). Ces intégrales peuvent être calculées, mais certaines d'entre elles peuvent aussi évaluées de façon approchée. Nous donnons ces approximations dans la *méthode de Hückel généralisée*.

3.1 Intégrales de Coulomb

Les intégrales H_{ii} sont appelées *intégrales de Coulomb*. Comme l'OA ϕ_i est normée on peut écrire

$$H_{ii} = \left\langle \phi_i \left| \hat{H} \right| \phi_i \right\rangle = \frac{\left\langle \phi_i \left| \hat{H} \right| \phi_i \right\rangle}{\left\langle \phi_i \left| \phi_i \right\rangle}$$

puisque le dénominateur vaut 1. D'après le postulat des valeurs moyennes, cette quantité représente l'énergie d'un électron ayant ϕ_i pour fonction d'onde, dans l'environnement correspondant à \hat{H} , c'est à dire *en présence de toutes les particules de la molécule*. Mais comme ϕ_i , orbitale atomique, est principalement localisée au voisinage d'un atome particulier, on fait cependant l'approximation que cette énergie diffère peu de celle de l'électron dans l'atome isolé. En prenant comme origine de l'énergie celle de l'électron à l'infini, une bonne approximation de H_{ii} est l'énergie d'ionisation de l'électron de ϕ_i . Donc H_{ii} ne dépend que du type de l'atome et de la nature de l'orbitale de cet atome. Quelques valeurs sont présentées dans la Table 1.

		Н					
1s		-13,6					
	Li	Be	В	С	Ν	0	F
2s	-5,4	-10,0	-15,2	-21,4	-26,0	-32,3	-40,0
2p	-3,5	-6.0	-8,5	-11,4	-13,4	-14,8	-18,1
	Na	Mg	Al	Si	Р	S	Cl
3s	-5,1	-9,0	-12,3	-17,3	-18,6	-20,0	-30,0
3p	-3,1	-4,5	-6,5	-9,2	-14,0	-13,3	-15,0

Table I. Valeurs de H_{ii} (eV) des orbitales de valence de quelques atomes

Pour la même sous-couche, H_{ii} diminue quand l'électronégativité de l'atome augmente. Cette grandeur est *négative* : l'énergie de l'électron dans l'atome est inférieure à son énergie à l'infini. S'il n'en était pas ainsi, l'atome perdrait spontanément son électron.

3.2. Intégrales d'échange

 $H_{ij} = \langle \phi_i | \hat{H} | \phi_j \rangle$, appelée *intégrale d'échange*, ne peut, comme l'intégrale de Coulomb, recevoir une interprétation physique simple. C'est une énergie qui traduit l'interaction des orbitales atomiques ϕ_i et ϕ_j et qui joue un rôle primordial dans la formation de la liaison chimique. Une valeur approchée est donnée par la formule empirique suivante :

$$H_{ij} = 1,75 \frac{H_{ii} + H_{jj}}{2} S_{ij}$$
(5)

Comme les intégrales de Coulomb sont négatives, l'intégrale d'échange est négative si S_{ij} est positif.

3.3. Intégrales de recouvrement

Les intégrales S_{ij} sont appelées *intégrales de recouvrement*. La formule précédente montre qu'elle a une influence directe sur la valeur de H_{ij} et qu'elle joue par ce biais un rôle primordial dans la liaison chimique. C'est un nombre sans dimension dont l'expression en notations classiques

$$S_{ij} = \iiint_{\infty} \phi_i \phi_j dv$$

indique qu'elle ne peut prendre une valeur importante que s'il existe des régions de l'espace ou le produit $\phi_i \phi_j$ est important, donc des régions où les probabilités de présence d'un électron de ϕ_i et d'un électron de ϕ_j soient grandes : il y a *recouvrement* des domaines de localisation de ces deux électrons d'où le nom de cette grandeur. Si ϕ_i et ϕ_j appartiennent à des atomes éloignés, leur recouvrement est pratiquement nul (Fig. 1). Il peut être nul pour d'autres raisons (cf. plus loin). Si ϕ_i et ϕ_j sont deux orbitales de même type (ex 1*s* de H) et que la distance des deux noyaux tend vers zéro (cas limite non réalisable pratiquement), S_{ij} tend vers $S_{ii} = \pm 1$ selon la phase relative des OA (Fig. 1).



Fig. 1 Valeurs limites du recouvrement de 2 OA ns de deux atomes d'un même élément (ex. OA 1s de deux atomes H) en fonction de la distance des noyaux

4. Etude de la molécule H₂

4.1. Calcul des énergies et des fonctions d'onde moléculaires

La base d'OA est constituée par les orbitales de valence 1s de chaque atome 1 et 2 qui seront notées ϕ_1 et ϕ_2 . Ces orbitales sont prises avec la même phase (Fig. 2).

Le déterminant (4) s'écrit, en tenant compte que $S_{11} = S_{22} = 1$ et en posant $S_{12} = S$:

$$\begin{vmatrix} H_{11} - E & H_{12} - ES \\ H_{12} - ES & H_{11} - E \end{vmatrix} = 0$$
$$H_{12} - E = \pm (H_{12} - ES)$$

Ce qui donne deux valeurs de l'énergie, E et E^* :

$$E = \frac{H_{11} + H_{12}}{1 + S}$$

$$E^* = \frac{H_{11} - H_{12}}{1 - S}$$
(6)

S étant par hypothèse positif, H_{12} est négatif, et les dénominateurs étant positifs :

$$E < H_{11}.$$

.

On admettra (on pourrait le vérifier à l'aide de la formule approchée (5)) que:

 $E^* > H_{11}$.

On obtient donc une OM d'énergie plus basse que celle (H_{11}) de l'OA 1*s* qui est dite *liante* et sera notée σ , et une d'énergie plus élevée que celle de l'OA 1s qui est dite *antiliante* et sera notée σ^* (fig. 2).



Fig. 2 Diagramme orbitalaire de H₂. En noir, si on néglige S devant 1. En rouge, si on ne néglige pas S devant 1.

Pour une étude qualitative simplifiée, on peut négliger *S* devant 1. Les énergies des niveaux σ et σ^* sont alors symétriques par rapport à H_{11} .

Le calcul des coefficients des OM σ et σ^* peut être effectué par la méthode générale du § 2, mais il peut être simplifié ici en utilisant la symétrie de la molécule. En effet, la densité électronique correspondant à une OM d'expression $c_1\phi_1 + c_2 \phi_2$ doit être inchangée en tout point de l'espace si on permute les deux atomes 1 et 2, donc ϕ_1 et ϕ_2 .

$$(c_1\phi_1 + c_2\phi_2)^2 \equiv (c_1\phi_2 + c_2\phi_1)^2$$
$$(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) \equiv \pm (c_1\phi_2 + c_2\phi_1)$$

D'où deux possibilités ; avec le signe + :

$$(c_1 - c_2)\phi_1 + (c_2 - c_1)\phi_2 \equiv 0$$

ne peut être vérifié que si $c_1 = c_2$. Il s'agit de l'OM liante² σ .

$$\boldsymbol{\sigma} = c_1(\boldsymbol{\phi}_1 + \boldsymbol{\phi}_2)$$

Avec le signe moins, on aboutit à $c_1 = -c_2$ (OM σ^*). Ces coefficient ne sont définis qu'à un facteur près obtenu par la condition de normalisation. Pour l'OM σ :

² On pourrait le vérifier en calculant $\langle \sigma | \hat{H} | \sigma \rangle$ après détermination de c₁.

$$1 = \langle \sigma | \sigma \rangle = \langle c_1(\phi_1 + \phi_2) | c_1(\phi_1 + \phi_2) \rangle = c_1^2 \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle + c_1^2 \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle + 2c_1^2 \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle \rangle$$

$$1 = c_1^2 + c_1^2 + 2c_1^2 \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = c_1^2 (2 + 2S)$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{2(1+S)}}$$

Un calcul analogue pour l'orbitale σ^* donne finalement :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2(1+S)}} (\phi_1 + \phi_2)$$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{2(1-S)}} (\phi_1 - \phi_2)$$
(7)

Sous la forme simplifiée où l'on néglige S devant 1 :

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}(\phi_1 + \phi_2)$$
$$\sigma^* = \frac{\sqrt{2}}{2}(\phi_1 - \phi_2)$$

Le diagramme orbitalaire de la Figure 2 fait apparaître les niveaux atomiques de 1 et 2 et les niveaux moléculaires σ et σ^* . Dans le cas où *S* est négligé devant 1, le niveau σ liant est stabilisé de H_{12} par rapport au niveau atomique H_{11} ; le niveau antiliant σ^* est déstabilisé de $-H_{12}$. Si on ne néglige plus *S* devant 1, le niveau σ est *moins stabilisant*; on admettra, bien que cela ne soit pas évident, que le niveau σ^* est *plus déstabilisant*. Autrement dit, l'OM antiliante est plus antiliante que l'OM liante n'est liante. Les OM sont représentées de façon symbolique par les OA (1*s*) qui les ont formées avec la phase (signe) correspondante.



Figure 3. OM calculées (isodensité) de la molécule H₂.

Dans la Fig. 3 on a représenté une surface d'isodensité (Ψ^2 = constante) calculée des orbitales σ et σ^* de H₂. Avec ce mode de représentation, on utilise généralement un code (ici les couleurs bleu/rouge) pour indiquer les phases relatives de la fonction d'onde. On constate que les deux OM présentent une symétrie de révolution autour de l'axe internucléaire, que σ et σ^* sont respectivement symétrique et antisymétrique (elle change de signe) par rapport au plan médiateur de HH qui est pour cette dernière un plan nodal.

Remarque

Nous avons choisi la même phase pour les OA de la base. Ce choix a été dicté par la recherche de la simplicité, mais reste arbitraire. Supposons que, sous l'empire d'une pulsion masochiste, ϕ_1 et ϕ_2 aient été prises avec des phases différentes. Les énergies et la structure des OM seraient évidemment les mêmes, mais leur expression aurait été modifiée. On aurait alors S < 0, donc $H_{12} > 0$. L'orbitale liante serait

$$\sigma = 2^{-1/2} (\phi_1 - \phi_2)$$

et son énergie

$$E = H_{11} - H_{12}$$

4.2. Configurations électroniques de la molécule H₂

Les OM, comme les OA peuvent contenir chacune deux électrons de spins différents (cf. II.2.2). L'état fondamental de H₂ est donc un état singulet ayant pour configuration σ^2 . Dans l'approximation de Hückel (approximation orbitale, cf. III.1.2) où nous nous plaçons, l'énergie totale est la somme des énergies de chaque électron.

Les états excités de plus basse énergie sont un état triplet et un état singulet de configuration $\sigma^{1}\sigma^{*1}$, de même énergie à ce niveau d'approximation. Nous avons vu que le triplet est en fait d'énergie inférieure.

4.3. Pourquoi σ est-elle liante et σ^* antiliante ? Qu'est-ce que la liaison chimique ?

La molécule H₂ présente une *liaison chimique*, avec une distance moyenne entre les noyaux, appelée *longueur de liaison* de 0,74 Å. Cela signifie que l'ensemble de deux protons et deux électrons avec les deux protons à 0,74 Å de distance et les deux électrons dans l'orbitale σ (configuration σ^2) est plus stable que deux atomes H dont chaque électron est dans une OA 1*s* (configuration $1s^1 + 1s^1$) quelle que soit la distance de ces atomes.

Pour comprendre ce phénomène, comparons la densité électronique en un point M dans les deux situations suivantes.

(i) Chaque électron occupe l'OA 1*s* de chaque atome. La densité totale $\rho_0(M)$ est la somme des densités de chaque électron en *M* :

$$\rho_0(M) = \phi_1^2(M) + \phi_2^2(M)$$

(ii) Les deux électrons sont dans l'OM σ . La densité est $2\sigma^2(M)$, soit, dans l'approximation où *S* est négligé devant 1 :

$$\rho(M) = 2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_1(M) + \phi_2(M) \right) \right]^2 = \phi_1^2(M) + \phi_2^2(M) + 2\phi_1(M)\phi_2(M)$$

On voit que la densité s'est accrue du produit $2\phi_1(M) \phi_2(M) = 2dS$ dans le cas (ii) par rapport au cas (i). Ce produit n'est notable que pour des points M où ϕ_1 et ϕ_2 ont *tous les deux* des valeurs importantes, donc des points proches à la fois du noyau 1 et du noyau 2, donc de la région internucléaire : à l'extérieur du segment 1-2, l'une au moins des deux fonctions prend une valeur négligeable. La formation de l'orbitale moléculaire σ provoque un accroissement de charge négative entre les noyaux qui compense la répulsion de ceux-ci. Cet accroissement de charge internucléaire peut être caractérisé par

$$\iiint 2dS = 2S$$

ce qui met à nouveau en évidence le rôle fondamental du recouvrement dans la formation de la liaison chimique.



Fig. 4. Courbes d'isodensités calculées de deux électrons dans les cas suivants (ii) chaque électron occupe l'OA Is de chaque atome ; (ii) les deux électrons occupent l'OM Is. La distance des noyaux est 0,74 Å dans les deux

cas

La figure 4 montre les courbes calculées d'isodensité dans les cas (i) et (ii). La formation de l'orbitale σ^* s'accompagne également d'une variation de densité de $-\phi_1(M)\phi_2(M)$ par électron présent, traduisant cette fois un appauvrissement en électrons dans la région internucléaire. En particulier, la densité est nulle dans le plan médiateur du segment H-H (plan nodal). La localisation électronique se trouve « refoulée » hors de la zone internucléaire, ce qui tend à dissocier la molécule (Fig. 5), en attirant chaque noyau 1 et 2 avec une force différente.



Fig. 5. Effet de charges négatives sur la cohésion de la molécule. A gauche, la présence de charge entre 1 et 2 attire les noyaux l'un vers l'autre. A droite, la présence de charge à l'extérieur du segment 1-2 tend éloigner les noyaux l'un de l'autre.

La différence de localisation électronique dans σ et σ^* apparaît également dans leurs isodensités (Fig. 3).

On peut alors interpréter qualitativement les différences d'énergie entre les orbitales 1s, σ et σ^* , qui est due essentiellement à l'énergie potentielle³ de l'électron qui y est présent. Dans 1s (atome H) l'électron se trouve à une distance moyenne de 1 bohr (0,53 Å) d'*un* noyau. Dans σ , l'électron se trouve en grande partie à proximité de *deux* noyaux. Dans σ^* il est « loin » d'un noyau et « très loin » de l'autre.

³ Sur le rôle relatif de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique dans la liaison chimique, voir par exemple Cohen-Tannounji, *Mécanique Quantique*, p. 1184.

4.4. Variation de l'énergie en fonction de la distance internucléaire

La figure 6 montre comment varient les énergies des niveaux σ et σ^* en fonction de la distance d des noyaux 1 et 2.

On voit, selon les expressions (6), qu'à *d* infini, S = 0 et donc $H_{12} = 0$: *E* et *E** tendent vers H_{11} . Lorsque *d* diminue, *S* et H_{12} augmentent en valeur absolue : *E* diminue et tend vers une limite finie quand S = 1 pour d = 0; *E** augmente et tend vers l'infini quand *d* tend vers zéro. La partie droite de la fig. 6 représente *l'énergie potentielle* de la molécule H_2 à l'état fondamental σ^2 et à l'état excité $\sigma^1 \sigma^{*1}$. On doit tenir compte du fait qu'il y a deux électrons et qu'il existe un terme énergétique positif du à la répulsion des noyaux. On néglige cependant l'énergie potentielle. A l'état fondamental, le système est stabilisé quand d diminue depuis l'énergie $2H_{11}$ (2 atomes H isolés) à l'infini grâce à la stabilisation des deux électrons dans σ . Cependant, la répulsion nucléaire augmente : ces deux termes antagonistes se compensent exactement pour la distance internucléaire d'équilibre de la molécule H_2 (0,74 Å). La courbe obtenue est connue sous le nom de *courbe de Morse*.



Figure 6. Variation de l'énergie en fonction de la distance internucléaire d. A gauche, niveaux de OM σ et σ^* . A droite énergie potentielle totale à l'état fondamental σ^2 et excité $\sigma^{I} \sigma^{*I}$.

A l'état excité, comme le niveau antiliant est plus déstabilisé que le niveau liant n'est stabilisé, l'énergie électronique est toujours supérieure à sa valeur asymptotique. Il s'y ajoute la répulsion nucléaire. Si on excite une molécule H_2 , elle tend donc à se dissocier.

5. Interaction de deux orbitales atomiques différentes ; approximation de la perturbation

Le cas de H₂ était grandement simplifié par la symétrie de la molécule qui impliquait $H_{11} = H_{22}$. Nous allons examiner un système à deux centres et deux OA différentes ϕ_1 et ϕ_2 qui pourrait être représenté par la molécule LiH. L'atome 1 est l'hydrogène avec une OA de valence 1s notée ϕ_1 et l'atome 2 est le lithium avec un OA de valence 2s notée ϕ_2 . L'hydrogène est plus électronégatif que le lithium, ce qui entraîne $H_{11} < H_{22}$ (cf. Tableau 1).

5.1. Description et représentation graphique des OM

Les énergies des OM liante σ et antiliante σ^* sont obtenues en résolvant l'équation du 2^{ème} degré :

$$\begin{vmatrix} H_{11} - ES_{11} & H_{12} - ES_{12} \\ H_{12} - ES_{12} & H_{22} - ES_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Nous nous contenterons pour le moment de signaler les différences avec le cas symétrique de H₂.



Fig. 7. Diagramme orbitalaire d'un système à deux centre et deux OA (ex LiH)

L'orbitale σ est d'énergie inférieure de ΔE au plus bas des niveaux atomiques H_{11} . L'orbitale antiliante σ^* est d'énergie supérieure de ΔE^* au plus haut niveau atomique H_{22} . On retrouve le fait que le caractère antiliant de σ^* est plus marqué que le caractère liant de σ , soit, en valeur absolue $\Delta E^* > \Delta E$. Dans l'OM liante

$$\boldsymbol{\sigma} = c_1 \boldsymbol{\phi}_1 + c_2 \boldsymbol{\phi}_2$$

on a $c_1 > c_2 > 0$; dans l'OM antiliante

 $\sigma^* = c_1 * \phi_1 - c_2 * \phi_2$

on a $c_2^* > c_1^* > 0$. On peut dire que chaque OM a le caractère dominant de l'OA qui est la plus proche en énergie. Ces caractères dominants sont symbolisés dans la représentation graphique des OM de la Fig. 7 par des lobes de taille croissant comme la valeur absolue du coefficient correspondant.



Fig. 8 Isodensités calculées des orbitales $\sigma(\dot{a}$ *gauche) et* $\sigma^*(\dot{a}$ *droite) de LiH (Li en noir, H en rouge)*

Cette représentation est en accord qualitatif avec les isodensités calculées de la Fig. 8.



Fig. 9. Isodensités d'une même OA ϕ_l (1s) affectée de coefficients a_l et a_2 avec $a_2 > a_1 > 0$.

En effet, si on trace la densité ρ d'une OA (ici de type 1*s*) affectée des coefficients respectifs a_1 et a_2 avec $a_2 > a_1 > 0$, on voit sur la Fig. 9 qu'une isodensité ρ_0 correspond à un volume plus grand pour l'OA affectée du plus grand coefficient a_2 .

5.2. Polarisation de la liaison, caractère ionique partiel et charges atomiques

Dans l'état fondamental, les deux électrons de valence de LiH occupent l'OM de plus basse énergie, soit la configuration σ^2 . Cette orbitale localise la densité électronique principalement au voisinage de H, atome le plus électronégatif. Le lithium a donc partiellement transféré son électron de valence à l'hydrogène : la liaison LiH est polarisée selon Li(δ +)-H(δ -). La liaison a acquis un certain « caractère ionique partiel » du à l'inégalité des coefficients c₁ et c₂ de l'orbitale. La densité d'*un* électron occupant σ est en tout point :

$$\rho = \sigma^2 = (c_1\phi_1 + c_2\phi_2)^2 = c_1^2\phi_1^2 + c_2^2\phi_2^2 + 2c_1c_2\phi_1\phi_2$$

Sa charge, obtenue en sommant dans tout l'espace, se répartit donc selon

$$1 = c_1^2 \int \phi_1^2 dv + c_2^2 \int \phi_2^2 dv + 2c_1 c_2 \int \phi_1 \phi_2 dv = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2 S$$

Il est naturel d'attribuer à l'atome 1 la charge c_1^2 et à l'atome 2 la charge c_2^2 . La charge $2c_1c_2S$ n'appartient en propre à aucun des atomes : c'est la *population de recouvrement*. Dans l'approximation de Mulliken, on convient de la partager équitablement entre les atomes dont les charges électroniques sont alors respectivement

$$q_{1} = c_{1}^{2} + c_{1}c_{2}S$$
$$q_{2} = c_{2}^{2} + c_{1}c_{2}S$$

Ces charges pour 1 électron devront évidemment être doublées si deux électrons occupent l'OM. La *charge nette* Q de chaque atome est l'excès (ou le défaut) d'électrons par rapport à sa neutralité où il possèderait 1 électron dans cette OM, d'où pour la configuration σ^2 :

$$Q_1 = 1 - 2q_1$$

 $Q_2 = 1 - 2q_2$

On pourra vérifier que pour une molécule symétrique telle que H₂, la valeur de $c_1 = c_2$ figurant dans (7) conduit à $Q_1 = Q_2 = 1$.

5.3. Méthode de la perturbation

Le calcul des énergies et des coefficients n'a pas été effectué dans les conditions du § 5.1., bien qu'il ne présente pas de difficulté particulière, parce que le résultat n'aurait guère été « parlant » et n'aurait pas permis de déduire des résultats généraux qualitatifs. Ceci ne peut être obtenu qu'au prix des approximations plus sévères de la *perturbation*, qui donne une expression simple des quantités ΔE et ΔE^* .

Le déterminant (4) conduit à l'équation

$$(H_{11} - E)(H_{22} - E) - (H_{12} - ES)^2 = 0$$

On suppose tout d'abord que ES est négligeable devant H_{12} . L'équation s'écrit alors

$$E^{2} - E(H_{11} + H_{22}) + H_{11}H_{22} - H_{12}^{2} = 0$$

Son discriminant est

$$\Delta = (H_{11} + H_{22})^2 - 4H_{11}H_{22} + 4H_{12}^2 = (H_{22} - H_{11})^2 + 4H_{12}^2$$
$$\Delta = (H_{22} - H_{11})^2 \left[1 + \frac{4H_{12}^2}{(H_{22} - H_{11})^2} \right]$$

On suppose alors que H_{22} - H_{11} par hypothèse non nul est grand devant H_{12} de sorte que la fraction précédente est un infiniment petit du premier ordre ε . On calcule alors $\sqrt{\Delta}$ en utilisant l'approximation

$$\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1+\frac{\varepsilon}{2}$$

D'où

$$\sqrt{\Delta} = (H_{22} - H_{11}) \left[1 + \frac{2H_{12}^2}{(H_{22} - H_{11})^2} \right]$$

ce qui conduit aux solutions en E :

$$E = \frac{1}{2} \left((H_{22} + H_{11}) \pm \left[(H_{22} - H_{11}) + \frac{2H_{12}^2}{(H_{22} - H_{11})} \right] \right)$$

$$E_1 = H_{11} - \frac{H_{12}^2}{(H_{22} - H_{11})}$$

$$E_2 = H_{22} + \frac{H_{12}^2}{(H_{22} - H_{11})}$$

Il apparaît un niveau liant E_1 , stabilisé par rapport à H_{11} . Le niveau antiliant est déstabilisé de la même quantité par rapport à H_{22} . L'approximation donc conduit à une légère erreur, puisque, nous l'avons dit $\Delta E^* > \Delta E$ (Fig. 7), mais permet en revanche une discussion qualitative aisée de l'interaction de deux orbitales.

On voit en particulier que :

- si $H_{12} = 0$ (ce qui, d'après son expression approchée (5) équivaut à S = 0), les niveaux moléculaires sont identiques aux niveaux atomiques : il n'y a aucune interaction, et les OM sont identiques aux OA.

- à recouvrement S identique, l'interaction est inversement proportionnelle à la différence $H_{22} - H_{11}$ des niveaux en interaction.

5.4. Interaction de deux orbitales : résumé et bilan énergétique

Nous avons examiné au § 4 l'interaction de deux OA de même énergie (*dégénérées*), avec l'exemple de H₂, puis de deux OA *non dégénérées* avec l'exemple de LiH et l'approximation perturbative. Ces études ne présument aucunement de la nature des orbitales en interaction : OA, ou OM, appartenant ou non à la même molécule. Les résultats importants que nous récapitulons ici sont donc très généraux.

Si deux orbitales présentent un *recouvrement S non nul*, il existe une intégrale d'échange H_{12} non nulle et les deux orbitales interagissent pour donner deux nouvelles orbitales :

- la première est liante, d'énergie inférieure au niveau initial le plus bas.
- la seconde est antiliante, d'énergie supérieure au niveau initial le plus haut.

Dans le cas dégénéré, la perturbation énergétique est proportionnelle à S.

Dans le cas non dégénéré, elle est, au premier ordre, proportionnelle à S^2 et inversement proportionnelle à la différence d'énergie des niveaux en interaction.

Le bilan énergétique de l'interaction dépend du nombre total d'électrons de ce système. Les divers cas possibles sont présentés dans la Fig. 10.



Fig. 10. Cas possibles dans l'interaction de deux orbitales.

- L'interaction à 1 électron (1) amène une stabilisation du système total, par abaissement de l'énergie de cet électron.

- L'interaction à 2 électrons (2) ou (3) est encore plus stabilisante puisque deux électrons sont stabilisés.

- L'interaction à 4 électrons (5) a un bilan nul au premier ordre. Mais elle est en fait déstabilisante si on se rappelle (Fig. 7) que la déstabilisation de l'orbitale liante est plus grande que la stabilisation de l'orbitale antiliante.

- L'interaction à 3 (4) électrons a donc un bilan indécidable qualitativement. Elle est néanmoins presque toujours stabilisante.

6. Recouvrement et liaison chimique

Nous avons déjà signalé à plusieurs reprise le rôle crucial joué par le recouvrement dans la liaison chimique. Celle-ci ne se forme que dans la mesure où il existe une intégrale d'échange non nulle, donc un recouvrement non nul, selon la relation (7). Or il existe un critère simple reposant sur des considérations symétrie pour prévoir des cas de nullité de *S*.

6.1. Recouvrements nuls par symétrie

Considérons par exemple le recouvrement de l'orbitale ϕ_1 de type *s* d'un atome 1 et de l'orbitale ϕ_2 de type p_y d'un atome 2 (Fig. 11). La première fonction est symétrique par rapport au plan xz, la seconde est *antisymétrique* par rapport à ce plan. Le produit $dS = \phi_1 \phi_2 dv$ change de signe dans un élément de volume dv' symétrique de dv, et les éléments différentiels dS s'annulent deux à deux.

Une condition suffisante de nullité de *S* est donc qu'il existe au moins un élément de symétrie commun aux deux orbitales, tel que l'une soit symétrique, l'autre antisymétrique par rapport à cet élément.



Fig. 11. Recouvrement selon z d'une orbitale s et d'une orbitale p_v .

A contrario, une condition nécessaire pour que *S* ne soit pas nul est que les deux orbitales aient la même caractéristique (symétrique ou antisymétrique) par rapport à *tous leurs éléments communs*. Cette règle s'exprime dans le langage de la théorie des groupes en disant que les deux orbitales doivent appartenir à la *même représentation irréductible*. Cependant un simple coup d'œil suffit à reconnaître la nullité des recouvrements des orbitales de la figure 12.



Fig. 12. Quelques couple d'orbitales s et p de recouvrement nul

6.2. Recouvrement et liaisons σ et π

Les recouvrements non nuls présentés dans la Fig. 13 se classent en deux catégories.



Fig. 13 Recouvrements σ et π de couples d'orbitales s et p.

A droite, les orbitales se recouvrent selon un axe de symétrie de révolution commun. Ce recouvrement donne lieu à un couple d'OM σ et σ^* qui présentent cet axe de symétrie. A gauche, il y a un recouvrement latéral d'orbitales *p* possédant un plan nodal commun. Il en

résulte un couple d'OM π et π^* qui conservent ce plan nodal passant par l'axe de la liaison. Le recouvrement σ étant plus grand que le recouvrement π , il donne lieu à une *liaison* σ plus forte que la *liaison* π , toutes choses égales par ailleurs.

7. Molécules de type AH; notion d'hybridation des orbitales atomiques

Considérons une molécule de type AH, A étant un atome dont la couche de valence est constituée de 4 OA ns et np (par exemple 2s et 2p). La liaison est prise selon l'axe z (Fig. 14). Les OM sont des combinaisons linéaires de 5 OA numérotées selon

1s(H)	2s(A)	$2p_z(A)$	$2p_x(A)$	$2p_y(A)$
1	2	3	4	5

On écrit le déterminant associé à ce système avec l'approximation $ES_{ij} \ll H_{ij}$ (i \neq j) et en remarquant que $S_{i4} = S_{i5} = 0$, d'où $H_{i4} = H_{i5} = 0$ quel que soit *i*.

$$\begin{vmatrix} H_{11} - E & H_{12} & H_{13} & 0 & 0 \\ H_{12} & H_{22} - E & 0 & 0 & 0 \\ H_{13} & 0 & H_{33} - E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{44} - E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{55} - E \end{vmatrix} = 0$$

On a également, comme il s'agit d'une intégrale de Coulomb des diverses OA 2p du fluor : $H_{33} = H_{44} = H_{55}$. Ce déterminant a pour solutions évidentes $H_{44} = E$ et $H_{55} = E$, traduisant le fait que les OA p_x et p_y n'ayant aucun recouvrement avec 1s(H) restent inchangées : elles donnent des OM *non liantes*, n_{π} (on pourra aussi appeler ces OM n_{px} et n_{py}) dans la Fig. 14, identiques à ce qu'elles étaient dans l'atome A isolé.



Figure 14. Diagramme orbitalaire simplifié d'une molécule AH

Les autres solutions s'obtiennent en résolvant le déterminant 3X3 et conduisent à 3 OM de la forme

$$\Psi = c_1 \cdot 1s(H) + c_2 \cdot 2s(A) + c_3 2p_z(A)$$

Il apparaît ainsi, dans la même OM, un « mélange » de *deux OA du même atome*, 2s et $2p_z$. Ce phénomène est appelé *hybridation des orbitales atomiques*. Bien entendu, en général c_2 est différent de c_3 et chaque OM ne contient pas la même proportion de ces deux OA On peut même considérer que le mélange s-p est négligeable quand leur différence d'énergie est importante. Cependant, pour construire de façon rapide et qualitative le diagramme orbitalaire (Fig. 14), on peut effectuer une hybridation préalable *sp* en remplaçant 2*s* et $2p_z$ par les deux combinaisons normalisées $2s + p_z$ et $2s - p_z$. comme indiqué en Fig. 15.



Fig. 15. Hybridation sp

L'une de ces hydrides « pointe » en direction de H et se recouvre fortement avec son OA pour donner les OM σ et σ^* . L'autre ne se recouvre que faiblement et pourra être considérée souvent comme « quasi non-liante », n_{σ} dans la Fig. 14.

On peut voir dans la Fig. 16 que les isodensités calculées, pour la molécule HF, présentent un accord qualitatif assez satisfaisant avec cette construction simplifiée.



Fig. 16. Isodensités des orbitales de F-H.

On notera que l'orbitale liante σ est principalement localisée sur le fluor, plus électronégatif, au contraire de l'orbitale antiliante σ^* . Dans ce cas particulier, l'orbitale n_{σ} présente un caractère liant assez important.

8. Molécules diatomiques symétriques

8.1. H₂ et He₂

La molécule H₂ a été étudiée en détail et nous avons vu qu'à l'état fondmental elle a pour configuration σ^2 . Avec deux électrons liants dans une orbitale σ , nous dirons que la molécule possède une liaison σ .

La molécule He₂ présente les mêmes OA de valence que H₂, donc le même diagramme orbitalaire. Sa configuration électronique serait $\sigma^2 \sigma^{*2}$. La stabilisation des deux électrons liants est compensée, et même au-delà, par la déstabilisation des électrons antiliants : il s'agit d'une interaction à 4 électrons, répulsive, et la molécule n'exite pas⁴. L'ion He₂⁺ ($\sigma^2 \sigma^{*1}$) présente interaction stabilisante à 3 électrons et une énergie de liaison de l'ordre de 300 kJmol⁻¹ avec une distance internucléaire d'équilibre de 1.04 Å. Le « bilan de liaison » est de 1 électron liant, soit une demi-liaison σ .

8.2. Diagramme orbitalaire des molécules de type A2

 $^{^4}$ Il exite en fait des états métastables excités de He₂ qui font intervenir d'autre OA que celles de la couche de valence. En outre des interactions faibles de Van der Waals existent entre les atomes.

Le diagramme orbitalaire des molécules de type A_2 (couche de valence *s* et *p*) est de deux types. Le premier correspond aux cas de F_2 et O_2 et peut s'établir en considérant qu'il n'y a pas d'hydridation *s*-*p* (Fig.17) à cause de la grande différence d'énergie 2*s*-2*p* (cf. Table 1).



Fig. 17. Diagramme orbitalaire de F_2 et O_2 .

Les orbitales 2*s* se combinent entre elles pour former un premier ensemble σ_s et σ_s^* , les orbitales 2*p* se combinent entre elles pour former un couple σ_z et σ_z^* et deux couples $\pi_x \pi_y$ et $\pi_x \pi_y^*$. On remarquera que l'écart liant-antiliant est plus petit pour les π que pour les σ en raison du plus faible recouvrement.

Pour les molécules N₂, C₂ et B₂, il y a par rapport au cas précédent une inversion des niveaux σ_z et $\pi_{x,y}$. Ce phénomène provient du fait que les OA 2*s* et 2*p* se rapprochant le long de cette séquence, les OM σ_s et σ_z se rapprochent également. Etant de même symétrie, il existe entre elles un recouvrement et donc une intégrale d'échange non nulles. Ces niveaux « se repoussent », et σ_z passe au-dessus de $\pi_{x,y}$ avec lesquelles elle n'a aucune interaction pour raison de symétrie.



Fig. 18. Variations relatives des niveaux orbitalaires dans les molécules A₂.

Le même phénomène se produit dans le couple σ_s - σ^*_{z} , mais n'a pas d'incidence sur l'ordre relatif des niveaux.



Fig. 19. Isodensités calculées des orbitales de N2.

8.3. Configuration électronique et étude de la liaison des molécules A2

La configuration électronique à l'état fondamental établie grâce aux diagrammes précédents permet d'expliquer les différentes tendancs concernant l'énergie de liaison E et la distance internucléaire d'équilibre d ces molécules.

- Li₂ a pour configuration σ_s^2 . La molécule comporte une liaison σ , avec E = 105 kJ.mol⁻¹ et d = 1.67 Å.

- Be₂ aurait pour configuration $\sigma^2 \sigma^{*2}$: le bilan de liaison est nul (2 électrons liants vs. 2 électrons antiliants); c'est une situation semblable à celle de He₂.

- B₂ a pour configuration $\sigma^2 \sigma^{*2} \pi_x^{-1} \pi_y^{-1}$ (E = 280 kJ mol⁻¹, d = 1,59 Å). Les deux électrons célibataires sont dans un arrangement triplet selon la règle de Hund : la molécule, qui présente un moment magnétique permanent, est *paramagnétique*. Le bilan de liaison, deux électrons π liants est donc 1 liaison π , d'où une liaison faible avec une distance d relativement importante.

- C₂ a pour configuration, selon la fig. 18 $\sigma^2 \sigma^{*2} \pi_x^2 \pi_y^2$ qui est un état singulet (*E* = 602 kJ mol⁻¹, *d* = 1,31 Å) avec un bilan de 2 liaisons π . En fait à cause de la proximité des niveaux σ_z et π , il existe un état triplet pratiquement de même énergie (...) $\sigma_z^2 \pi_{xy}^3$.

- N₂ a pour configuration (..) $\pi_{xy}^4 \sigma_z^2$ (*E* = 945 kJ mol⁻¹, *d* = 1,09 Å). Avec une triple liaison, six électrons liants contribuent à augmenter la densité dans la région internucléaire et la liaison est particulièrement forte et donc courte.

- O₂ a pour configuration (...) $\pi_{xy}^4 \sigma_z^2 \pi_x^{*1} \pi_y^{*1} (E = 497 \text{ kJ mol}^{-1}, d = 1,21 \text{ Å})$. Avec 4 électrons π liant pour deux antiliants, il ne reste qu'une liaison π et une liaison σ . La molécule est triplet et donc paramagnétique dans son état fondamental. L'ion O₂⁺ ($E = 770 \text{ kJ mol}^{-1}, d = 1,12 \text{ Å}$) n'a plus qu'un électron antiliant et un bilan de 2,5 liaisons, plus grand que celui de la molécule neutre. Au contraire, les anions O₂⁻ (d = 1,26 \text{ Å}) et O₂²⁻ (d = 1,49 \text{ Å}) sont moins liés que O₂.

- F₂, de configuration (..) $\pi_{xy}^4 \sigma_z^2 \pi_x^* \pi_y^* (E = 157 \text{ kJ mol}^{-1}, d = 1,44 \text{ Å})$ présente un bilan d'une liaison σ .