

PHYSIQUE 2

*Département des Technologies Industrielles (TIN)
Orientation Microtechnique (MI)*

ÉLECTROMAGNÉTISME

Prof. André Perrenoud

T A B L E D E S M A T I E R E S

PAGE

1. INTRODUCTION.....	1
1.1 LA MATIÈRE ET LES FORCES QUI LA RÉGISSENT	1
1.2 PLAN DU COURS	2
2. ÉLECTROSTATIQUE.....	3
2.1 LES PREMIÈRES EXPÉRIENCES	3
2.2 LA LOI DE COULOMB	5
2.3 LE CHAMP ÉLECTRIQUE	8
2.3.1 Exemples de calcul	9
2.3.1.1 <i>Champ électrique produit par une seule charge placée à l'origine</i>	9
2.3.1.2 <i>Champ électrique produit par deux charges séparées par une distance a</i>	10
2.3.1.3 <i>Champ électrique sur l'axe d'un anneau uniformément chargé</i>	11
2.3.2 Le potentiel électrique.....	12
2.3.2.1 <i>Calcul du travail nécessaire pour déplacer une charge dans un champ électrique</i>	12
2.3.2.2 <i>Exemple : Potentiel d'une charge ponctuelle</i>	13
2.3.2.3 <i>Méthode de l'image</i>	15
2.3.2.4 <i>Circulation du champ électrique</i>	16
2.3.2.5 <i>Notion de gradient</i>	17
2.3.3 Le flux du champ électrique	18
2.4 LE THÉORÈME DE GAUSS.....	19
2.4.1 Applications du théorème de Gauss	21
2.4.1.1 <i>Champ électrique produit par un barreau rectiligne infini uniformément chargé</i>	21
2.4.1.2 <i>Champ électrique produit par une plaque infinie uniformément chargée</i>	22
2.4.1.3 <i>Champ électrique dans un condensateur plan</i>	23
2.5 LES CONDENSATEURS	24
2.5.1 Condensateur plan	24
2.5.2 Condensateur cylindrique.....	25
2.5.3 Condensateur sphérique.....	26
2.5.4 Ligne bifilaire.....	26
2.5.5 Combinaisons de condensateurs	27
2.5.6 Energie stockée	28
2.6 LE CHAMP ÉLECTRIQUE DANS LA MATIÈRE	29
2.6.1 Matériaux conducteurs.....	29
2.6.1.1 <i>Blindage électrostatique</i>	30
2.6.1.2 <i>Plaque conductrice à l'intérieur d'un condensateur plan</i>	31
2.6.2 Matériaux diélectriques.....	32
2.6.3 Le champ de déplacement électrique	36
2.6.4 Comportement du champ électrique à l'interface de deux diélectriques.....	38
3. LE COURANT ÉLECTRIQUE.....	39
3.1 COURANT DE DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR EN FONCTION DU TEMPS	40
3.2 RÉSISTIVITÉ	41
3.2.1 Théorie microscopique élémentaire.....	41
3.2.2 Puissance dissipée par effet Joule.....	43
3.2.3 Variation de la résistivité des métaux en fonction de la température	44
3.3 CONDUCTIVITÉ, DENSITÉ DE COURANT ET ÉQUATION DE CONTINUITÉ.....	46
3.3.1 Loi d'Ohm sous forme locale.....	46
3.3.2 L'équation de continuité sous forme intégrale	47
3.3.3 L'équation de continuité sous forme locale	49

4.	MAGNÉTOSTATIQUE	51
4.1	LE MAGNÉTISME NATUREL	51
4.2	TROIS EXPÉRIENCES CÉLÈBRES	53
	4.2.1 Expérience d'Oersted	53
	4.2.2 Expérience d'Ampère	53
	4.2.3 Expérience de la rotation magnétique de Faraday	54
4.3	LE CHAMP MAGNÉTIQUE	55
	4.3.1 Forme des lignes de champ	55
	4.3.2 Force sur un élément de courant – Loi de Laplace.....	56
	<i>4.3.2.1 Application de la loi de Laplace: le galvanomètre à cadre mobile</i>	<i>57</i>
	4.3.3 Moment magnétique	59
	4.3.4 Loi de Biot et Savart	60
	<i>4.3.4.1 Champ \vec{B} produit par un conducteur rectiligne</i>	<i>61</i>
	<i>4.3.4.2 Champ \vec{B} sur l'axe d'une spire</i>	<i>63</i>
	<i>4.3.4.3 Bobines de Helmholtz</i>	<i>64</i>
4.4	FORCE ENTRE DEUX CONDUCTEURS PARALLÈLES – DÉFINITION DE L'AMPÈRE	65
4.5	LE THÉORÈME D'AMPÈRE.....	66
	4.5.1 Applications du théorème d'Ampère	68
	<i>4.5.1.1 Champ dans un solénoïde long</i>	<i>68</i>
	<i>4.5.1.2 Champ dans une bobine torique.....</i>	<i>69</i>
	4.5.2 Force de Lorentz.....	70
	<i>4.5.2.1 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme</i>	<i>70</i>
	<i>4.5.2.2 Effet Hall.....</i>	<i>72</i>
4.6	LE THÉORÈME DE GAUSS MAGNÉTIQUE	73
5.	INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE.....	75
5.1	EXPÉRIENCE DE FARADAY	75
	5.1.1 Applications de la loi de Faraday-Lenz.....	78
	<i>5.1.1.1 Bobine tournant dans un champ magnétique uniforme</i>	<i>78</i>
	<i>5.1.1.2 Principe du moteur à courant continu</i>	<i>79</i>
	<i>5.1.1.3 Inductance d'un solénoïde.....</i>	<i>81</i>
	<i>5.1.1.4 Inductance mutuelle de deux solénoïdes.....</i>	<i>83</i>
	<i>5.1.1.5 Énergie stockée dans une bobine</i>	<i>84</i>
	<i>5.1.1.6 Densité d'énergie du champ \vec{B}</i>	<i>84</i>
5.2	LOI DE FARADAY SOUS FORME INTÉGRALE.....	85
5.3	LE CHAMP D'INDUCTION MAGNÉTIQUE DANS LA MATIÈRE	86
	5.3.1 Perméabilité relative	86
	5.3.2 Champ magnétique \vec{H} et magnétisation.....	87
	<i>5.3.2.1 Interprétation de la magnétisation.</i>	<i>88</i>
	5.3.3 Les circuits magnétiques	91
	<i>5.3.3.1 Loi d'Ohm magnétique</i>	<i>92</i>
	<i>5.3.3.2 Exemple de calcul du flux dans un circuit simple.....</i>	<i>93</i>
	<i>5.3.3.3 Exemple de calcul du champ dans l'entrefer d'un aimant.....</i>	<i>94</i>
	<i>5.3.3.4 Force électromécanique</i>	<i>95</i>
	5.3.4 Transformateurs	97
	5.3.5 Comportement du champ magnétique à l'interface de deux matériaux.....	99

6. LES ÉQUATIONS DE MAXWELL.....	101
6.1 FORME INTÉGRALE.....	101
6.2 FORME LOCALE	102
6.3 INTRODUCTION AUX ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES	105
6.3.1 Ondes planes	105
6.3.2 Densité d'énergie d'une onde plane EM	108
6.3.3 Intensité d'une onde plane EM	109
INDEX.....	110

1. INTRODUCTION

1.1 LA MATIÈRE ET LES FORCES QUI LA RÉGISSENT

La matière est composée de particules qui se regroupent d'une multitude de façons pour former les diverses substances que nous connaissons. L'étude de la nature des particules et des forces qui les attirent ou les repoussent occupe les physiciens depuis la nuit des temps. On connaît actuellement 4 forces fondamentales :

- La **force de gravitation** : deux particules massives s'attirent proportionnellement au produit de leurs masses et inversement au carré de la distance qui les séparent ; c'est la loi de l'attraction universelle publiée la première fois en 1687 par **Isaac Newton**. La gravitation est prépondérante à grande échelle ; elle rend compte du mouvement des astres et permet en particulier de prédire les positions des planètes dans le système solaire.
- La **force électrique** : deux particules chargées se repoussent ou s'attirent proportionnellement au produit de leurs charges électriques et inversement au carré de la distance qui les sépare ; cette loi a été énoncée vers 1784 par **Charles de Coulomb** sur la base de mesures faites entre corps chargés (électrisés) par frottement. L'attraction ou la répulsion s'explique par le fait qu'il existe deux sortes de charges, positive et négative. Deux charges de même signe se repoussent et deux charges de signe contraire s'attirent.

L'idée que la matière était faite de particules chargées électriquement s'imposa peu à peu au XIX^e siècle grâce aux progrès réalisés en chimie et en physique. Les corps simples sont constitués d'atomes tous semblables, eux-mêmes formés d'un noyau chargé positivement et entourés d'électrons chargés négativement. La charge de l'électron fut mesurée pour la première fois par J. J. Thomson en 1897. L'hypothèse d'un noyau positif placé au centre de l'atome fut confirmée expérimentalement par Rutherford en 1912.

- La **force forte** (ou force nucléaire) : elle a été postulée pour expliquer la cohésion des noyaux d'atomes qui sont composés de protons et de neutrons. Une force capable de vaincre la répulsion électrique des protons est en effet nécessaire à l'échelle du noyau afin que celui-ci n'éclate pas. La première modélisation théorique de l'interaction forte est l'oeuvre **Yukawa** et date de 1935.
- La **force faible** : elle a été introduite pour rendre compte des rayonnements émis spontanément par certaines substances comme l'uranium. Découverte en 1895 par Henri Becquerel, la radioactivité fut ensuite l'objet des travaux de Marie et Pierre Curie. Les effets observés ne pouvaient s'expliquer par les forces connues à cette époque. Dans les années 1930, on comprit le rôle crucial que jouait l'interaction faible dans les réactions nucléaires expliquant le fonctionnement du Soleil. Il fallut de nombreuses expériences au moyen d'accélérateurs de particules toujours plus puissants avant qu'une classification des particules (modèle standard, hypothèse des quarks, 1964) et une théorie satisfaisante de l'interaction faible ne soient proposées. Aux grandes énergies, les forces électriques et faibles perdent leur individualité. L'unification de ces deux forces au niveau théorique date de la fin des années 1960.

Dans le cursus des études d'ingénieur, la connaissance pratique des deux premières forces est incontournable. Traditionnellement, la gravitation fait partie du cours PHY1 et l'électromagnétisme du cours PHY2. L'étude des deux autres forces fait partie de ce qu'on appelle la physique moderne, c'est-à-dire celle qui s'est développée depuis le début du XX^e siècle avec l'avènement de la théorie de la relativité et de la mécanique quantique.

Le lecteur aura remarqué que la **force magnétique** n'a pas encore été mentionnée. Cependant, pour un ingénieur, il s'agit d'une force au moins aussi importante que la force électrique. En effets, les forces magnétiques interviennent dans une foule de dispositifs tels que moteurs, actionneurs, capteurs. En réalité, les forces magnétiques apparaissent lorsque des charges électriques sont mises en mouvement. Un observateur immobile par rapport à un ensemble de charges immobiles ne percevra que des forces électriques (électrostatiques). Comme l'ont montré Lorentz et Einstein, les forces magnétiques qui viennent s'ajouter sont une conséquence des mouvements relatifs des charges électriques les unes par rapport aux autres. C'est ce qui explique que, du point de vue du physicien, la force magnétique ne soit plus considérée comme fondamentale, au même titre que les quatre autres.

En pratique, il n'est heureusement pas nécessaire d'appliquer la théorie de la relativité chaque fois que l'on veut concevoir un nouvel actionneur ou perfectionner un moteur. Il suffit en principe de connaître les lois classiques de l'induction et les propriétés des matériaux, c'est-à-dire les bases de l'électromagnétisme.

1.2 PLAN DU COURS

L'ordre des chapitres reflète le développement historique de l'électromagnétisme, ce qui présente l'avantage didactique d'aller du plus simple au plus compliqué. L'ordre général est le suivant :

- Electrostatique
- Courant électrique
- Magnétostatique
- Induction
- Unification électromagnétique : les équations de Maxwell.

Les ondes électromagnétiques seront étudiées dans la deuxième partie du cours PHY2, qui est consacrée aux différents types d'ondes.

Le cours est complété par des séries d'exercices.

Livres

Physique 2, Électricité et magnétisme, Halliday, Resnick, Walker, ISBN 2-89461-852-2, Chenelière/McGraw-Hill, 2003.

Physique 2, Électricité et magnétisme, Douglas C. Giancoli, De Boeck Université.

Physique 2, Électricité et magnétisme, Harris Benson, Éd. du Renouveau Pédagogique, Montréal.

2. ÉLECTROSTATIQUE

2.1 LES PREMIÈRES EXPÉRIENCES

Le mot électricité vient du grec électron (ηλεκτρον), qui signifie ambre. Les Grecs anciens avaient remarqué que l'ambre¹ frotté avec un tissu attirait la poussière ou de petits objets. Selon l'histoire des Sciences, c'est Thalès de Milet (-625 à -547), savant et philosophe grec de l'école ionienne (côte ouest de la Turquie actuelle) qui se préoccupa le premier des phénomènes électriques².

Pendant des siècles, il semble que personne ne se soit intéressé vraiment à cette découverte, car on ne voyait pas ce qu'on pouvait en faire pratiquement. A la fin du XVII^e siècle les expériences reprennent avec d'autres matériaux. Le verre, l'ébonite (caoutchouc durci) ont aussi la propriété de s'électriser par frottement. Pour les métaux, cela s'avère plus difficile. En revanche, si on touche un morceau de métal avec une baguette chargée, on lui communique dans son entier la propriété d'attirer des petits objets. Tout se passe comme si cette propriété mystérieuse s'écoulait, telle un fluide, au travers du métal. Cette observation est fondamentale, puisque qu'elle permet de classer les matériaux entre **conducteurs et isolants**. Enfin, on constate que les objets isolants électrisés par contact se repoussent.

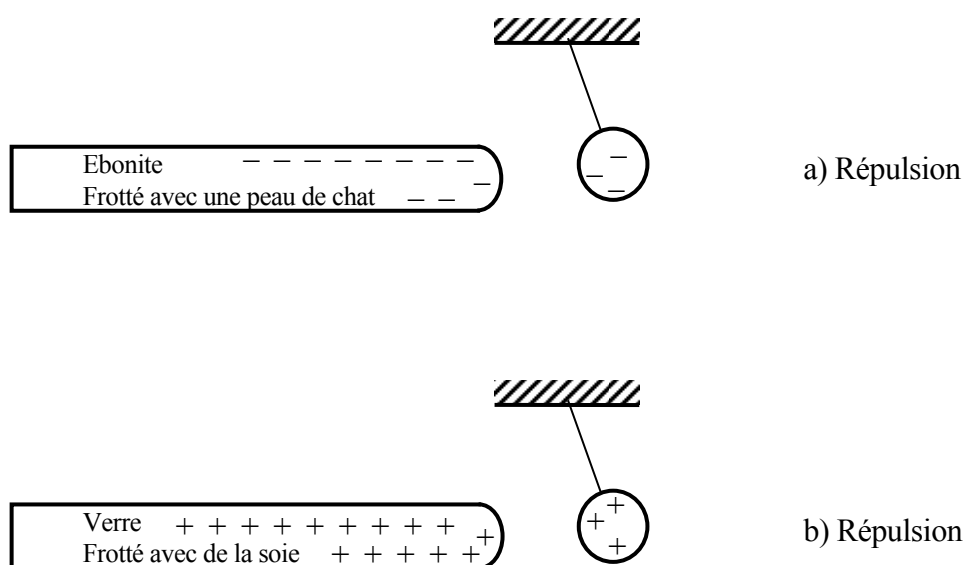


Fig. 1 - Les charges de même nature se repoussent

Dans l'expérience schématisée ci-dessus, on approche une baguette chargée d'une petite balle de sureau initialement neutre. Après s'être chargée par contact, cette balle est repoussée par la baguette.

¹ Résine fossile de couleur jaune – rouge provenant de conifères.

² Mentionnons aussi Aristote (-384 à -322), fondateur de l'école d'Athènes, qui s'intéressa aux poissons électriques et essaya d'utiliser leurs décharges à des fins thérapeutiques.

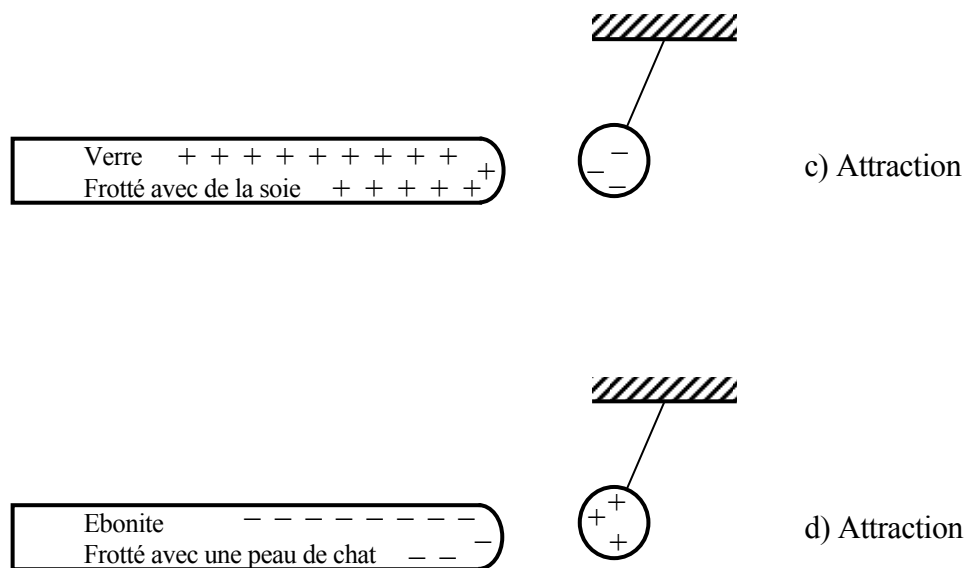


Fig. 2 - Les charges de nature contraire s'attirent

Dans l'expérience schématisée ci-dessus, lorsqu'on approche une baguette chargée d'une petite balle de sureau chargée au moyen de l'autre baguette, on constate que la balle subit une attraction.

On conclut de ces expériences qu'il existe deux sortes d'électricités. D'abord nommées vitreuse et résineuse (Charles du Fay, 1733), elles furent ensuite appelées **positive et négative** par Benjamin Franklin³, appellation que nous utilisons encore aujourd'hui.

Franklin démontra la nature électrique la foudre et le pouvoir des pointes d'attirer celle-ci. On lui doit l'invention du **paratonnerre** qui permet de protéger les maisons en permettant à l'électricité de s'écouler vers la terre sans provoquer ni incendie ni dégât.

Si au XVIII^e siècle les phénomènes électriques paraissaient bien mystérieux, ils s'expliquent de nos jours facilement grâce à notre connaissance de la structure de la matière. En frottant une baguette de verre avec un chiffon de soie, on arrache des électrons aux atomes de verre, ce qui provoque un déséquilibre dans la répartition des charges : le nombre des protons étant supérieur à celui des électrons, la baguette apparaît chargée positivement. Les électrons arrachés n'ont pas disparu ; ils sont retenus par la soie, qui elle est chargée négativement. Le même raisonnement peut être fait pour l'ébonite et la peau de chat : dans ce cas le frottement provoque un surplus d'électrons sur l'ébonite. Enfin, la bonne conduction des métaux s'explique par le fait que les électrons périphériques sont relativement libres de se déplacer d'un atome à l'autre dans la structure cristalline. Un léger déséquilibre dans la répartition des charges suffit à les mettre en mouvement, tout comme une différence de pression met en mouvement les particules d'un gaz.

³ Benjamin Franklin (Boston 1706 – Philadelphie 1790). Physicien et homme politique américain, auteur avec T. Jefferson de la Déclaration d'Indépendance.

2.2 LA LOI DE COULOMB

Il n'est pas facile de mesurer la force entre deux corps électrisés par simple frottement. D'une part la force est très faible et d'autre part les corps ont tendance à se décharger. Les premières mesures furent faites par Coulomb⁴ au moyen d'une balance de torsion, semblable à celle de Cavendish. Ce qu'il y a de remarquable, c'est que la force présente la même dépendance en $1/r^2$ que la loi de la gravitation universelle, mais, dans le calcul, c'est les charges qui interviennent au lieu des masses. Coulomb publia la loi qui porte désormais son nom en 1784.

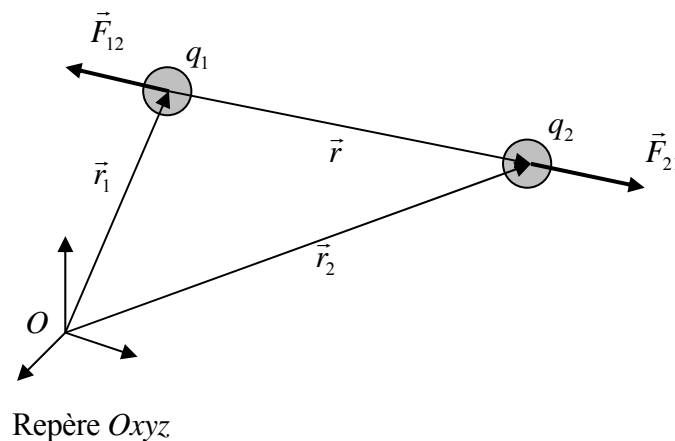


Fig. 3 – Forces électriques entre deux charges considérées comme ponctuelles

Par convention :

\vec{F}_{21} = force exercée sur la charge 2 par la charge 1

\vec{F}_{12} = force exercée sur la charge 1 par la charge 2

Le système étant isolé, la loi de l'action et de la réaction implique $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

Notons F le module de ces forces : $F = |\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}|$.

Dans le système d'unités international (SI), la loi de Coulomb s'écrit :

sous forme scalaire :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad [\text{N}] \quad (2.1s)$$

sous forme vectorielle :
(avec $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$)

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad [\text{N}] \quad (2.1v)$$

L'unité de charge est le coulomb, C en abrégé. C'est la charge transportée par un courant de 1 ampère pendant 1 seconde. $1 \text{ C} = 1 \text{ A}\cdot\text{s}$ La constante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ vaut environ $9 \cdot 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$.

⁴ Charles de Coulomb, Angoulême 1736 – Paris, 1806.

On écrit la constante sous cette forme pour des raisons historiques qui seront expliquées dans la suite du cours. En introduisant le facteur 4π dans la loi de Coulomb, on évite d'avoir à l'écrire dans certaines formules et équations importantes de l'électromagnétisme.

Il existe d'autres systèmes d'unités dans lesquels la constante de proportionnalité prend d'autres valeurs. Par exemple, dans le système d'unités électrostatiques CGS, on la pose égale à l'unité, ce qui a pour conséquence de définir l'unité de charge, puisque les unités de force et de longueur sont déjà fixées.

Après l'unification des théories de l'électricité et du magnétisme, il est apparu préférable de prendre comme unité fondamentale celle du courant électrique, plutôt que celle de la charge. Les courants sont beaucoup plus faciles à mesurer que les charges électriques isolées.

Les ondes électromagnétiques se propageant dans le vide à la vitesse de la lumière, c , nous verrons qu'il existe une relation entre ε_0 et c , que l'on écrit habituellement comme suit :

$$\boxed{\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1} \quad (2.2)$$

Constante :	Valeur exacte	Unité	Unité	Valeur approchée
Vitesse de la lumière :	$c = 299\,792\,458$	m/s		$3 \cdot 10^8$
Perméabilité du vide :	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$	N/A ²	V·s/(A·m)	
Permittivité du vide :	$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	C ² /(N·m ²)	A·s/(V·m)	$8,8542 \cdot 10^{-12}$
	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} = 10^{-7} \cdot c^2$	N·m ² /C ²	V·m/(A·s)	$9 \cdot 10^9$

Table 1 – Les constantes fondamentales de l'électromagnétisme
(L'unité de potentiel électrique, le volt, V, sera définie plus loin au § 2.3.2.)

Au cours du XIX^e siècle, la théorie atomique de la matière s'imposa définitivement. Un atome est constitué d'un noyau chargé positivement entouré d'électrons chargés négativement. Le noyau est formé d'un nombre variable de protons et de neutrons.

	Charge	Masse
Proton	$+e = +1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Neutron	0	$m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Electron	$-e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$m_e = 9,1094 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Table 2 – Les particules constitutives de l'atome⁵

⁵ Voir par exemple www.metas.ch pour les valeurs actualisées avec toutes les décimales connues.

Un atome neutre possède autant d'électrons que de protons. Ce nombre, le **numéro atomique**, est caractéristique d'un élément donné. Exemples :

- l'hydrogène, le plus léger, $Z = 1$;
- le fer, $Z = 26$;
- l'uranium, l'élément naturel le plus lourd, $Z = 92$.

C'est la force de Coulomb qui assure la stabilité de l'atome. On peut s'imaginer l'atome comme un système solaire en miniature, le noyau étant le Soleil et les électrons les planètes. Chaque électron possède une énergie cinétique et une énergie potentielle. L'énergie qu'il faut fournir pour arracher un électron à un atome est appelée **énergie de liaison**.

Les caractéristiques chimiques d'un élément dépendent de l'arrangement de ses électrons périphériques. En mettant en commun les électrons qui sont les moins liés à leur noyau, les atomes peuvent former des molécules dont les caractéristiques chimiques sont en général radicalement différentes des éléments qui les constituent.

La structure atomique de la matière permet de comprendre deux principes importants :

- Dans un système physique fermé, la somme algébrique des charges électriques reste constante. En effet, en modifiant la répartition des électrons et des protons, on ne change pas la somme des charges électriques. C'est le **principe de la conservation de la charge**. Ce principe n'a encore jamais été mis en défaut, même en physique des hautes énergies.
- Les charges électriques observées à l'échelle macroscopique sont toutes des multiples entiers de celle de la charge élémentaire⁶. C'est le **principe de la quantification de la charge**.

Dans les chapitres suivants, nous allons étudier les forces électrostatiques qui se manifestent à notre échelle entre corps chargés. Vu le très grand nombre de charges élémentaires mises en jeu, la charge totale pourra être traitée comme une grandeur continue exprimée en coulombs. Si nécessaire, on peut toujours calculer le nombre de charges élémentaires qui interviennent.

Exemple :

Combien y a-t-il de charges élémentaires transportées en 1 seconde par un courant de 1A ?

$$\text{Charge transportée : } q = 1\text{A} \cdot 1\text{s} = 1 \text{ C}$$

$$\text{Nombre de charges : } n = \frac{q}{e} = \frac{1}{1,6092 \cdot 10^{-19}} = 6,242 \cdot 10^{18}$$

Ce nombre est gigantesque. Même dans les dispositifs microtechniques, où les charges se mesurent en nano- ou picocoulombs, le nombre de charges élémentaires mises en jeu reste très grand.

⁶ Selon la théorie des quarks, les protons et neutrons sont constitués de 3 particules (les quarks) ayant des charges fractionnaires. Cependant on n'a pas encore pu les observer de manière isolée.

2.3 LE CHAMP ÉLECTRIQUE

L'interprétation de la loi de Coulomb soulève un problème d'ordre métaphysique. On est en présence de deux particules qui ne se touchent pas, mais qui exercent néanmoins une force l'une sur l'autre. D'ailleurs, ce même problème se rencontre aussi en gravitation. Pour rendre compte de ce genre d'action à distance, on introduit en physique la **notion de champ**. Cela n'explique pas la nature profonde du phénomène, mais, en attendant une théorie meilleure, cela s'avère d'une grande utilité en pratique. La particule 1 crée un champ présent dans tout l'espace ; la particule 2 interagit avec ce champ, ce qui se traduit par une force qui s'applique sur elle.

Lorsque plusieurs particules sont en présence, chaque particule ressent l'attraction ou la répulsion des autres. Les forces s'additionnent vectoriellement. Si l'on prend un système de n particules de charge q_i , la résultante agissant sur une particule de charge q s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i q \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (2.3)$$

Les vecteurs \vec{r}_i repèrent les positions des charges q_i et \vec{r} repère la position de la charge q .

En mettant la charge q en évidence, on définit le champ électrique comme suit :

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad [\text{N/C}] \equiv [\text{V/m}] \quad (2.4)$$

Le champ électrique est exprimé habituellement en volt par mètre.

Exprimé en unités de base: $1\text{V} = 1\text{m}\cdot\text{N}\cdot\text{C}^{-1} = 1\text{m}\cdot(\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2})\cdot(\text{A}\cdot\text{s})^{-1} = 1\text{m}^2\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{A}^{-1}$

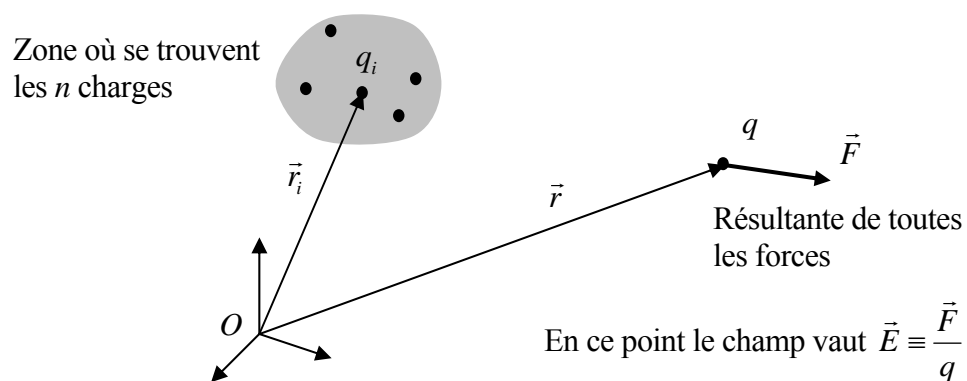


Fig. 4 – Champ électrique produit par un ensemble de charges

Ainsi l'action des n charges est résumée en tout point de l'espace par un vecteur \vec{E} qui dépend de la position \vec{r} . On parle d'un *champ de vecteurs*, ou plus simplement de *champ*. La force $q\vec{E}$ s'appelle **force de Coulomb**.

2.3.1 Exemples de calcul

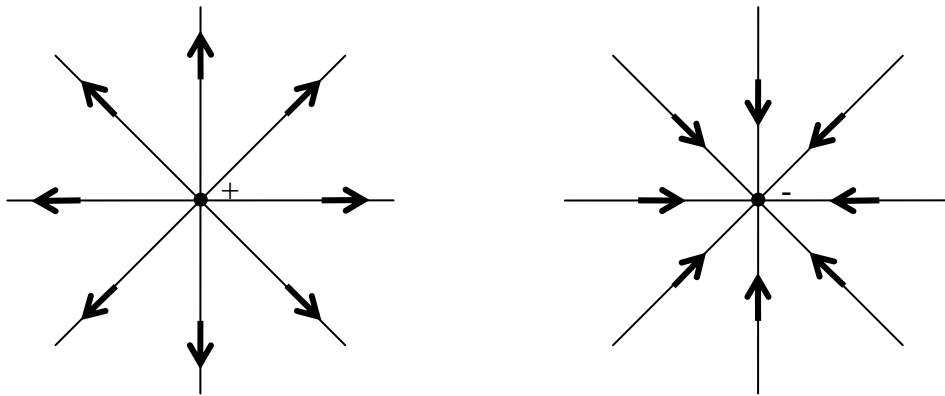
2.3.1.1 Champ électrique produit par une seule charge placée à l'origine

La charge est désignée par q_1 et dans ce cas : $\vec{r}_1 = \vec{0}$.

La force \vec{F} ressentie par une charge test q repérée par \vec{r} vaut selon (2.3) : $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q \vec{r}}{r^2 r}$.

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}} \quad [\text{V/m}] \quad (2.5)$$

Dans ce cas le champ \vec{E} a la même direction que \vec{r} . On dit que le champ est **radial**.



Charge positive

Charge négative

Fig. 5 – Champ électrique radial produit par une seule charge

Pour représenter graphiquement un champ électrique, on peut dessiner quelques vecteurs. Les lignes qui sont constamment tangentes aux vecteurs $\vec{E}(\vec{r})$ sont appelées **lignes de champ**.

En composantes, au point $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on a explicitement : $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Pour la composante selon x : $E_x(x, y, z) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

Chaque composante du champ \vec{E} est une fonction des trois coordonnées x, y, z .

2.3.1.2 Champ électrique produit par deux charges séparées par une distance a .

Choisissons le repère $Oxyz$ comme schématisé ci-dessous :

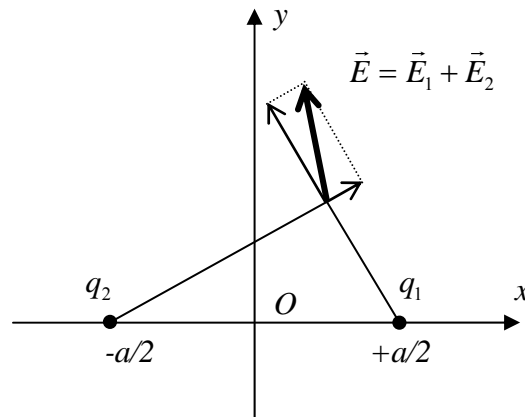


Fig. 6 – Champ électrique produit par deux charges
(Cas de deux charges positives)

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left((x-a/2)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} x-a/2 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left((x+a/2)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} x+a/2 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

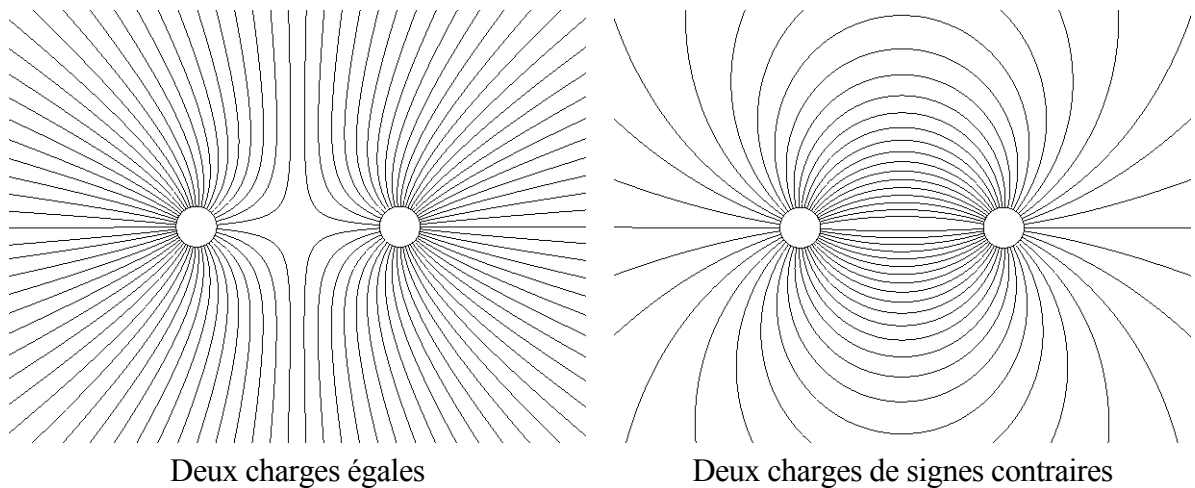


Fig. 7 – Allure des lignes de champ

La symétrie du champ électrique reflète celle de la distribution de charges.

2.3.1.3 Champ électrique sur l'axe d'un anneau uniformément chargé

Soit Q la charge totale et a le rayon de l'anneau.

Un élément $d\ell$ porte une charge $dq = Q \frac{d\ell}{2\pi a}$

Le champ électrique produit en point P situé à une distance z du centre de l'anneau vaut :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(z^2 + a^2)} \quad (\text{en module})$$

Le champ $d\vec{E}$ se décompose en :

$d\vec{E}_1$ perpendiculaire à z

et $d\vec{E}_2$ parallèle à z .

Vu la symétrie axiale, la somme sur le pourtour de l'anneau des composantes $d\vec{E}_1$ perpendiculaires à z est nulle.

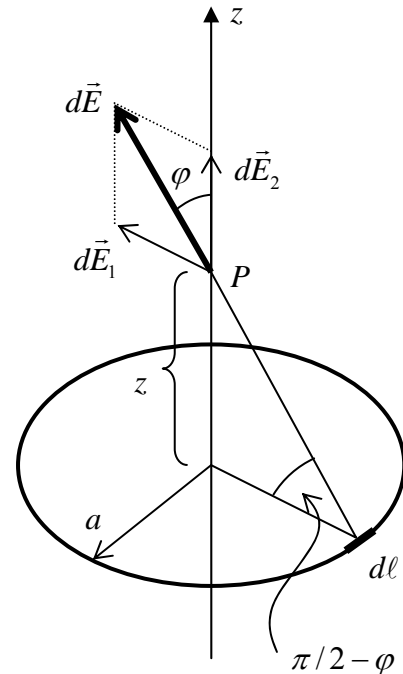


Fig. 8 – Anneau chargé

Composante parallèle : $dE_2 = dE \cos \varphi$

$$dE_2 = dE \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

En faisant la somme de toutes les charges dq sur le pourtour de l'anneau, il vient :

$$\text{Champ sur l'axe d'un anneau} \quad \boxed{E_2 = E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}}} \quad [\text{V/m}] \quad (2.6)$$

A grande distance l'anneau est vu comme un point et le champ tend vers celui d'une charge ponctuelle.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

2.3.2 Le potentiel électrique

2.3.2.1 Calcul du travail nécessaire pour déplacer une charge dans un champ électrique

Considérons une particule chargée dans un champ électrique \vec{E} . Cette particule subit donc la force de Coulomb $\vec{F} = q\vec{E}$. Si nous voulons déplacer la particule d'un point A à un point B, il nous faudra fournir un certain travail pour vaincre cette force.

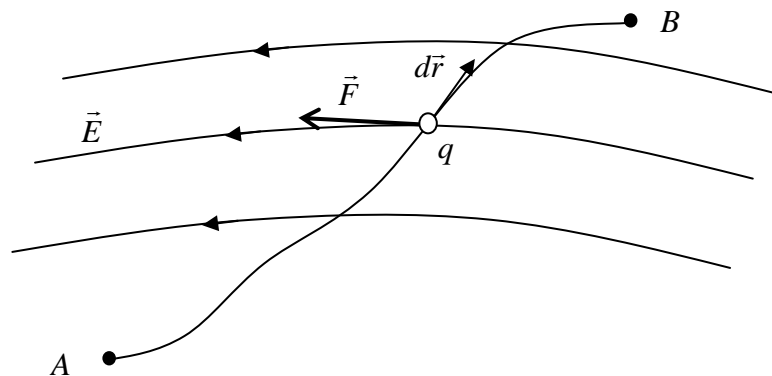


Fig. 9

Pour effectuer un petit déplacement $d\vec{r}$, le travail à fournir vaut $dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$

La raison du signe moins est qu'il faut s'opposer à la force due au champ qui tend à déplacer la charge q dans l'autre sens.

Travail pour aller de A à B

$$W_{AB} = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad [\text{J}] \quad (2.7)$$

On peut montrer que W_{AB} ne dépend pas de la forme du chemin pour aller de A et B. On peut donc définir la **différence de potentiel** entre B et A, ou **tension** comme étant le travail fourni pour déplacer la charge de A à B divisé par la charge.

Tension = différence de potentiel entre B et A

$$U_{BA} \equiv V_B - V_A \equiv \frac{W_{AB}}{q} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad [\text{V}] \quad (2.8)$$

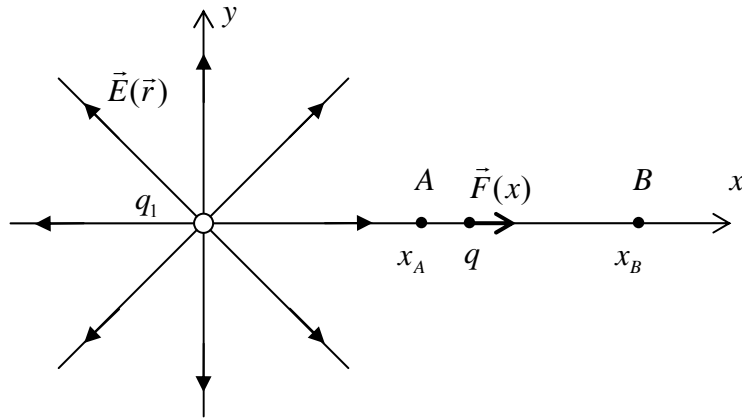
L'unité du potentiel électrique⁷ est le volt, V en abrégé.

Dimensionnellement : charge · (diff. de potentiel) = travail : C · V = J

Une charge positive libre de se déplacer ira naturellement du potentiel haut vers le potentiel bas, tout comme une masse a tendance à tomber sous l'effet de la gravité.

⁷ Alessandro Volta, 1745 – 1827, physicien italien, inventeur de la pile électrique.

2.3.2.2 Exemple : Potentiel d'une charge ponctuelle

Fig. 10 – Charge q_1 placée à l'origine

Plaçons l'origine des coordonnées sur la charge q_1 et calculons la différence de potentiel entre deux points situés sur l'axe x .

Une charge-test q située sur l'axe x subit une force selon x : $F_x(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{x^2}$

Champ électrique selon x : $E_x(x) = \frac{F_x(x)}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{x^2}$

Différence de potentiel entre B et A :

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B E_x(x) dx = -\int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{x^2} dx = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{x} \Big|_A^B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{x_B} - \frac{q_1}{x_A} \right)$$

Donc : $V_A = \frac{q_1}{x_A} + Cste$ $V_B = \frac{q_1}{x_B} + Cste$

Le potentiel est défini à une constante près. Dans cet exemple, on peut la choisir égale à zéro, ce qui correspond à un potentiel nul à l'infini.

En conclusion, le potentiel d'une charge ponctuelle ne dépend que de la distance à cette charge.

Potentiel à une distance r d'une charge q_1

$$V(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \quad [\text{V}] \quad (2.9a)$$

Potentiel en \vec{r} d'une charge q_1 placée en \vec{r}_1

$$V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|} \quad [\text{V}] \quad (2.9b)$$

L'exemple précédent montre aussi que la différence de potentiel entre deux points ne dépend que de leurs positions et non du chemin pour aller de l'un à l'autre.

Les lignes (ou les surfaces si on travaille en 3D) s'appellent **équipotentiels**. Pour une charge ponctuelle, les équipotentiels sont des cercles (en 3D, des sphères). Dans le cas de deux charges, les lignes (en 3D, les surfaces) équipotentiels sont plus compliquées, comme on peut le voir ci-dessous.

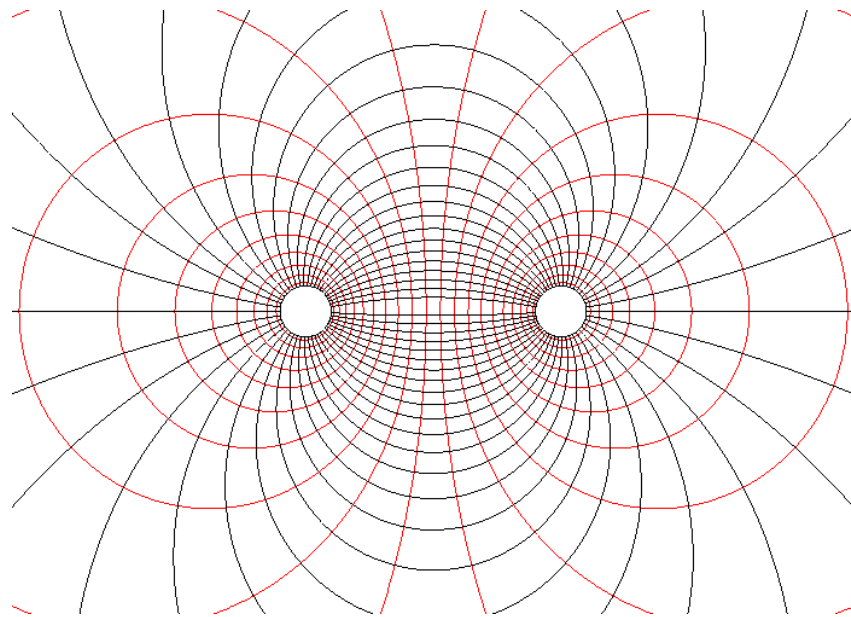


Fig. 11 – Équipotentiels et lignes de champ de deux charges de signes contraires
(Les équipotentiels sont les courbes fermées qui *ressemblent* à des cercles ;
les lignes de champ partent d'une charge et se terminent sur l'autre.)

Les équipotentiels coupent les lignes de champ à angle droit.

Analogie avec une carte de géographie :

Équipotentiels \Leftrightarrow Courbes de niveaux
Lignes de champ \Leftrightarrow Lignes de plus grande pente

Mathématiquement une équipotentielle obéit à une équation de la forme $V(x, y, z) = Cste$.

2.3.2.3 Méthode de l'image

Dans de nombreux cas, il est possible d'exploiter les symétries de la distribution de charges pour calculer le champ électrique.

Exemple : champ produit par une charge ponctuelle en face d'une plaque conductrice

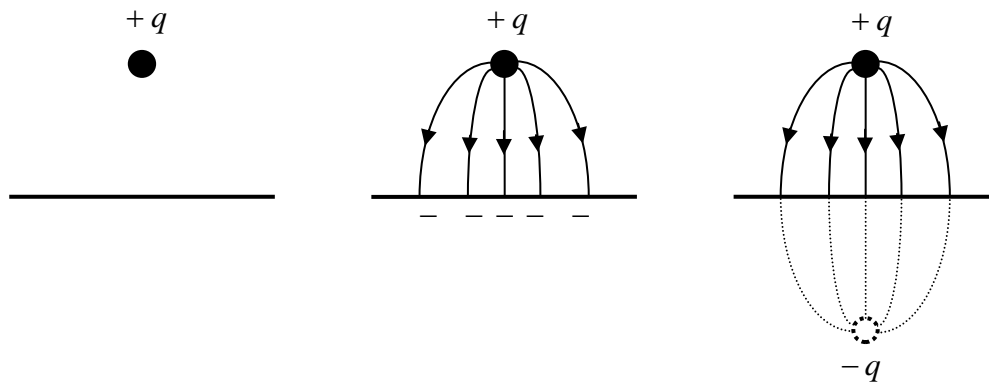


Fig. 12 – Méthode de l'image

Une charge placée en face d'une plaque conductrice va modifier la répartition de charge à la surface de celle-ci. C'est le phénomène de charge par influence. La nouvelle répartition se fait de telle sorte que les lignes du champ électrique y arrivent perpendiculairement. La plaque est une équipotentielle.

Si l'on plaçait une charge négative symétriquement de l'autre côté de la plaque, on obtiendrait des lignes de champ et des équipotentielle symétriques. On ne changerait pas la forme des lignes de champ si l'on retirait la plaque. D'où l'idée de la méthode : pour calculer le champ dans le demi-espace où se trouve la plaque on lui substitue une charge symétrique mais de signe opposé et on additionne les champs.

Cette méthode est utilisée par les électriciens pour calculer le champ électrique sous les lignes à haute tension. La surface sol est assimilée une équipotentielle $V = 0$.

2.3.2.4 Circulation du champ électrique

Dans les équations (2.7) et (2.8), l'intégrale $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$ s'appelle **circulation** du champ électrique.

Cette intégrale ne dépend pas de la forme du chemin pour aller de A à B , mais uniquement des positions de A et de B .

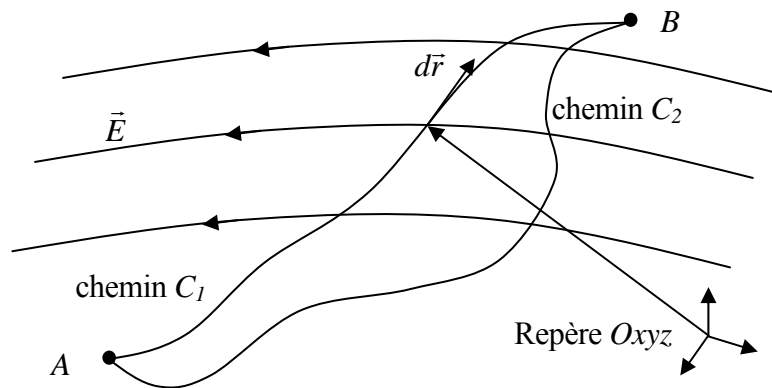


Fig. 13 $\int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Si on connaît l'expression mathématique du champ \vec{E} et les positions des points A et B , on peut calculer la circulation en paramétrant un chemin allant de A à B . En pratique on choisit un chemin simple tel que droite ou arc de cercle puisque la circulation ne dépend pas de la forme du chemin mais seulement de ses extrémités. Si l'on choisit le temps comme paramètre, le chemin est la trajectoire d'une particule qui irait de A à B . (Voir cours de mécanique.)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{Point A : } \vec{r}(t_A) = \begin{pmatrix} x(t_A) \\ y(t_A) \\ z(t_A) \end{pmatrix} \quad \text{Point B : } \vec{r}(t_B) = \begin{pmatrix} x(t_B) \\ y(t_B) \\ z(t_B) \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (E_x dx + E_y dy + E_z dz) = \int_{t_A}^{t_B} (E_x \dot{x} + E_y \dot{y} + E_z \dot{z}) dt$$

En exprimant chaque composante du champ électrique \vec{E} en fonction du temps t , par exemple $E_x = E_x(x(t), y(t), z(t))$, l'intégrale se ramène à une intégrale définie que l'on sait en principe calculer.

Pour un chemin allant de B à A , le signe de la circulation change et on a : $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Il s'ensuit que **la circulation sur un contour fermé est nulle**.

L'intégrale sur une courbe fermée se note :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad [\text{V}] \quad (2.10)$$

Attention : cette équation est valable en électrostatique seulement.

2.3.2.5 Notion de gradient

Reprenons l'équation (2.8) : $V_B - V_A \equiv \frac{W_{AB}}{q} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Lorsque le chemin est rectiligne et parallèle à l'axe x , comme sur la fig. 10, on a simplement :

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B E_x dx$$

Pour un déplacement infinitésimal dx , cela signifie que:

$$V(x + dx, y, z) - V(x, y, z) = -E_x dx$$

Donc : $E_x = -\frac{V(x + dx, y, z) - V(x, y, z)}{dx} \equiv -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}$

$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}$ ou plus simplement $\frac{\partial V}{\partial x}$ est la dérivée partielle par rapport à x . Pour la calculer, on maintient y et z constant et on dérive par rapport à x .

On peut faire le même raisonnement pour les coordonnées y et z . Finalement on écrit de manière condensée :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} V = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

On dit que le champ \vec{E} dérive d'un potentiel. L'opérateur noté $\overrightarrow{\text{grad}}$ est le gradient.

2.3.3 Le flux du champ électrique

Avant de se lancer dans le calcul du champ électrique produit par objets chargés, tels que plaques, cylindres, etc..., c'est-à-dire par des distributions continues de charges, il est utile de définir la notion de flux du champ électrique. Cette appellation résulte de l'analogie avec un flux de matière ou le débit d'un fluide.

Débit d'un fluide = courant · section	Flux du champ électrique
$\dot{m} = J \cdot S$	$\psi = E \cdot S$
$\text{kg/s} = \text{kg/m}^2/\text{s} \cdot \text{m}^2$	$\text{V} \cdot \text{m} = \text{V/m} \cdot \text{m}^2$

Table 3 – Analogie

dans le cas où les lignes de courant (lignes de champ) sont perpendiculaires à la surface S .

Si la surface S n'est pas perpendiculaire à \vec{E} , il faut fait intervenir l'angle entre celui-ci et la normale à la surface : $\psi = ES \cos \theta$.

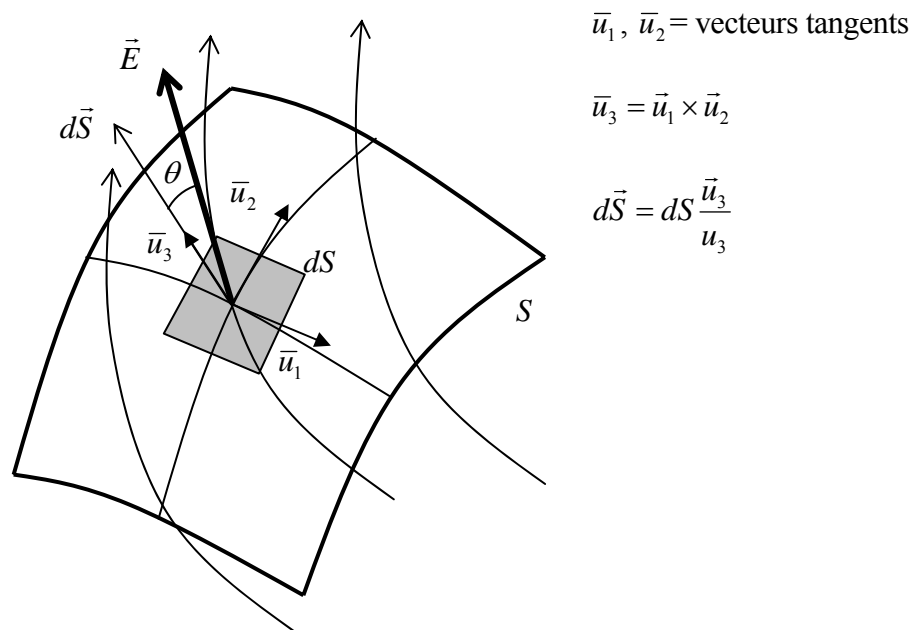


Fig. 14 – Élément de flux $d\psi = E dS \cos \theta = \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Dans le cas général d'une surface courbe S , il faut découper la surface en petits éléments dS que l'on peut considérer comme plans, calculer le flux et additionner (intégrer). Mathématiquement on résume cette opération par :

Flux du champ électrique

$$\psi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad [\text{V} \cdot \text{m}] \quad (2.11)$$

En tout point de la surface, l'élément de surface noté $d\vec{S}$ est un vecteur de longueur dS perpendiculaire à la surface. L'intégrale est double puisqu'il s'agit d'une surface.

2.4 LE THÉORÈME DE GAUSS

Commençons par calculer le flux du champ électrique produit par une charge ponctuelle q_1 à travers une surface fermée qui l'entoure.

Pour une sphère de rayon r centrée sur la charge, il vient (voir éq. (2.5)):

$$\text{Champ } \vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{radial})$$

$$\text{Elément de surface : } d\vec{S} = dS \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{radial})$$

$$\text{Elément de flux : } d\psi = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS$$

$$\text{Flux total : } \psi_1 = \iint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iint_S dS = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

(Pour toute surface, la somme des éléments de surface donne son aire, ici $4\pi r^2$.)

⇒ **Le flux ne dépend pas du rayon de la sphère.**

Nous allons exploiter ce fait pour calculer le flux à travers une surface quelconque.

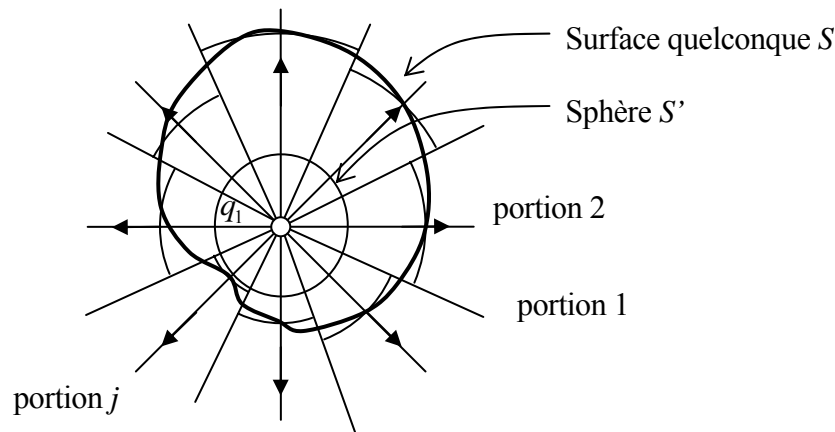


Fig. 16a – Surface quelconque approchée par m portions de sphère de surface dS_j

Plus m est grand, meilleure est l'approximation.

Pour chaque portion, le flux est approximativement égal à celui que cette portion intercepte sur une sphère S' entièrement contenu dans S .

$$\text{En sommant toute ces contributions, on aboutit aussi à } \psi_1 = \iint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{sphère } S'} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{q_1}{\epsilon_0}.$$

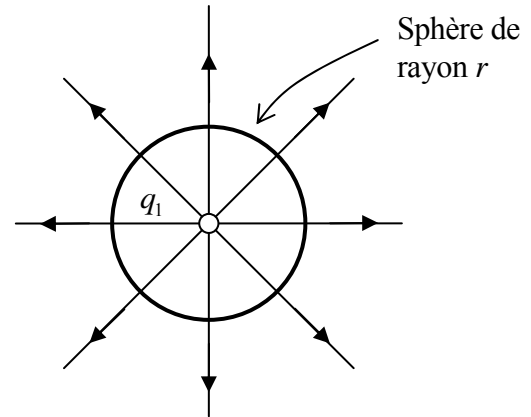


Fig. 15

Dans le cas général où n charges se trouvent à l'intérieur de la surface fermée S , il faut sommer tous les flux partiels ψ_i .

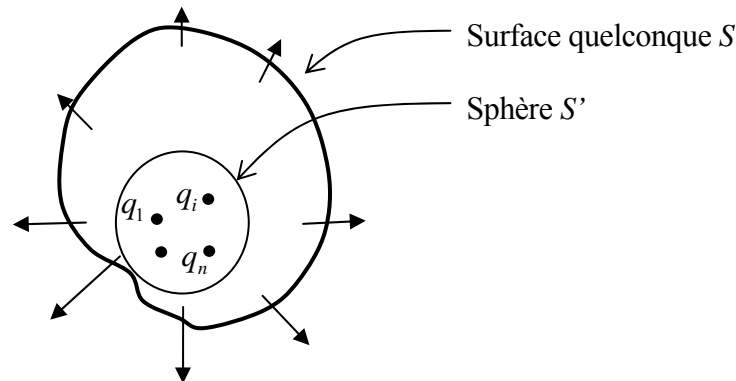


Fig. 16b – Surface quelconque entourant n charges q_i

$$\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i = \sum_{i=1}^n \left(\iint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal à $1/\epsilon_0$ fois la somme des charges à l'intérieur de cette surface.

Théorème de Gauss⁸

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \quad [\text{V}\cdot\text{m}] \quad (2.12a)$$

Une charge placée à l'extérieur de la surface fermée S ne contribue pas au flux total.

Le signe \oiint_S indique que l'intégrale porte sur une surface fermée S qui entoure les charges.

Dans le cas de distributions continues de charges, la somme est remplacée par une intégrale. Soit $\rho(x, y, z)$ la densité de charge en C/m^3 à l'intérieur du volume V délimité par la surface S . Un élément de volume dV contient une charge ρdV

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad [\text{V}\cdot\text{m}] \quad (2.12b)$$

Voyons maintenant quelques applications du théorème de Gauss.

⁸ Carl Friedrich Gauss, astronome, physicien et mathématicien allemand (1777 – 1855)

2.4.1 Applications du théorème de Gauss

2.4.1.1 Champ électrique produit par un barreau rectiligne infini uniformément chargé

Soit λ la densité linéique de charge du barreau, mesurée en C/m.

Pour de raisons de symétrie le champ électrique doit être purement radial, c'est-à-dire être perpendiculaire en tout point de l'espace à l'axe du barreau. Son module ne dépend que de la distance r à l'axe du barreau. Considérons un cylindre de rayon r et de longueur ℓ dont l'axe de symétrie coïncide avec l'axe du barreau.

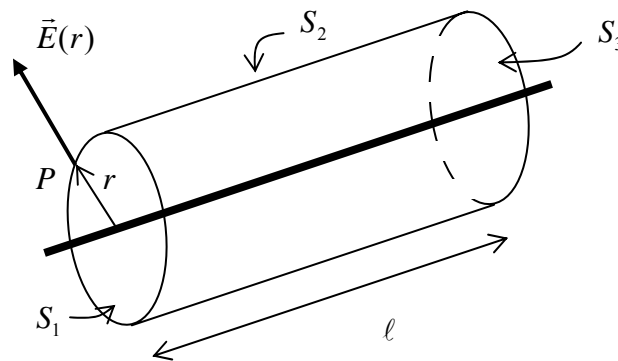


Fig. 17 – Cylindre entourant une section du barreau de longueur ℓ

Appliquons le théorème de Gauss à ce cylindre. La somme des charges entourées est simplement le produit de la densité linéique par la longueur du barreau, soit $\lambda\ell$.

$$\text{Donc : } \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0} \quad (\text{a})$$

La surface S se décompose en 3 surfaces S_1 , S_2 et S_3 .

$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{car la normale à la base du cylindre } S_1 \text{ est perpendiculaire à } \vec{E};$$

$$\iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{idem};$$

Sur la surface latérale S_2 , $\vec{E}(r)$ est constant et parallèle à $d\vec{S}$. On peut donc écrire :

$$\iint_{S_2} \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} E(r) dS = E(r) \iint_{S_2} dS = E(r) 2\pi r \ell. \quad (\text{b})$$

Finalement, en égalant les résultats (a) et (b) : $E(r) 2\pi r \ell = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0}$

Champ électrique à une distance r
d'un barreau rectiligne infini
uniformément chargé

$$\boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}} \quad [\text{V/m}] \quad (2.13)$$

2.4.1.2 Champ électrique produit par une plaque infinie uniformément chargée

Soit σ la densité surfacique de charge de la plaque, mesurée en C/m^2 .

Pour de raisons de symétrie, le champ électrique doit être perpendiculaire à la plaque. Son module ne peut dépendre que de la distance z à la plaque. Considérons un cylindre de rayon r et de hauteur $2z$ dont l'axe de symétrie est perpendiculaire à la plaque, comme schématisé ci-dessous.

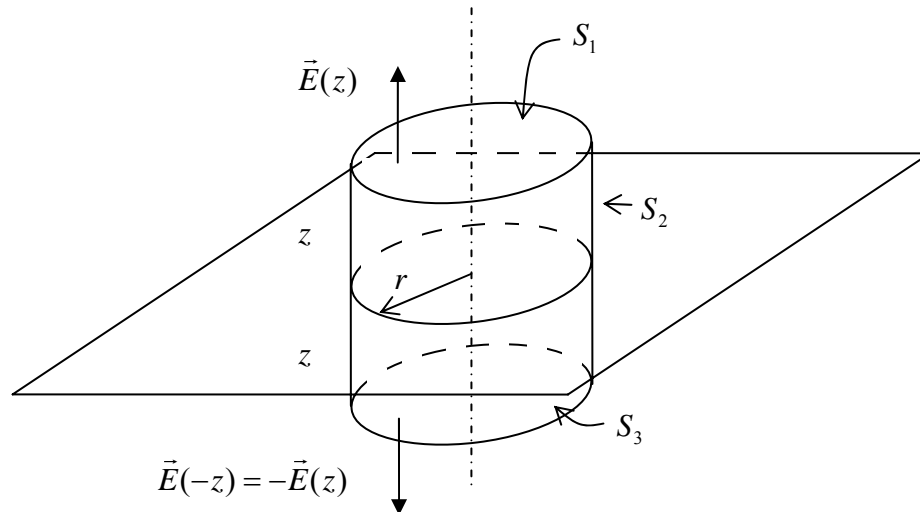


Fig. 18 – Cylindre perpendiculaire à la plaque

Appliquons le théorème de Gauss à ce cylindre. La somme des charges entourées est simplement le produit de la densité surfacique par la section du cylindre, soit $\sigma \pi r^2$.

$$\text{Donc : } \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0} \quad (\text{a})$$

La surface S se décompose en 3 surfaces S_1 , S_2 et S_3 .

$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(z) \pi r^2 \quad \text{car la normale à } S_1 \text{ est parallèle à } \vec{E}; \quad (\text{b1})$$

$$\iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(-z) \pi r^2 = E(z) \pi r^2 \quad \text{car la normale à } S_3 \text{ est aussi parallèle à } \vec{E}; \quad (\text{b2})$$

$$\iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{car la normale à la surface latérale du cylindre est perpendiculaire à } \vec{E};$$

$$\text{Finalement, en égalant les résultats (a) et (b1+b2) : } E(z) (\pi r^2 + \pi r^2) = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0}$$

Champ électrique produit par une plaque infinie uniformément chargée

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

[V/m]

(2.14)

Ne dépend pas de la distance à la plaque !

2.4.1.3 Champ électrique dans un condensateur plan

En électrostatique, on appelle condensateur tout dispositif formé de deux corps conducteurs portant des charges égales, mais de signes opposés.

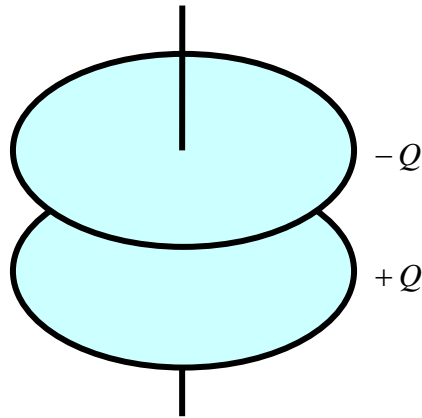


Fig. 19 – Condensateur plan formé de deux plaques parallèles

Soit S la surface d'une plaque, la densité surfacique de charge vaut $\sigma = +\frac{Q}{S}$ sur la plaque inférieure et $-\sigma$ sur la plaque supérieure.

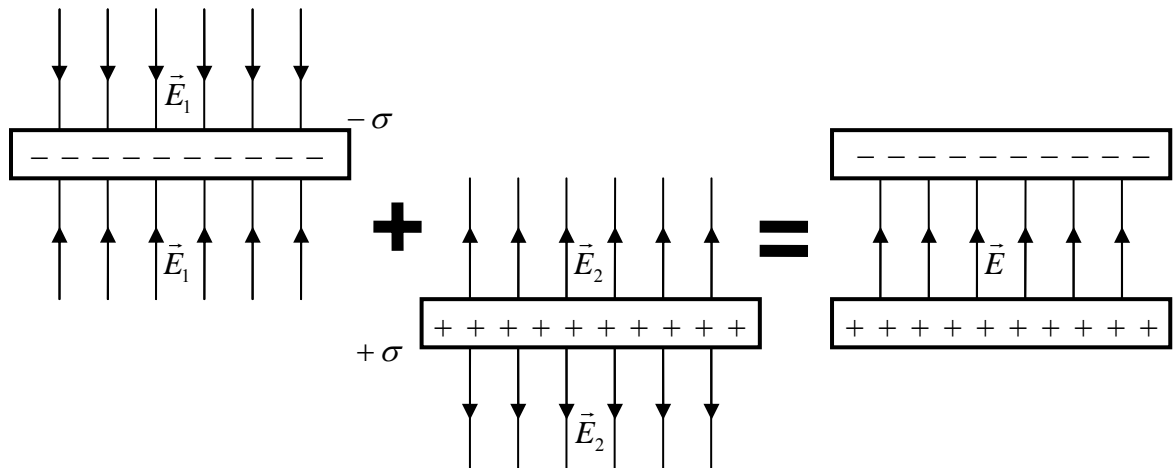


Fig. 20 – En négligeant les effets de bords, le champ électrique double entre les plaques et s'annule à l'extérieur.

Champ électrique dans un condensateur plan

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [\text{V/m}] \quad (2.15)$$

Le condensateur plan permet de produire un champ uniforme (pour autant que les plaques soient grandes par rapport à la distance qui les sépare).

2.5 LES CONDENSATEURS

Chacun sait que les condensateurs ont importance considérable en électrotechnique et en électronique. Etudions maintenant leurs propriétés d'emmagasiner des charges électriques en fonction de la différence de potentiel entre leurs armatures. Celles-ci dépendent naturellement de leurs formes géométriques. Commençons par le cas le plus simple.

2.5.1 Condensateur plan

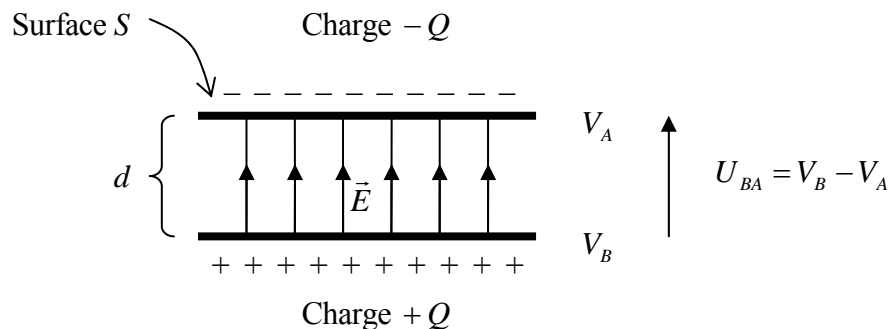


Fig. 21 – Condensateur plan (placé dans le vide)

En négligeant les effets de bords, le champ électrique vaut $E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$ (Voir § précédent.)

D'après la définition (2.8) de la tension, on a $U_{BA} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{Q}{\epsilon_0 S}(-d) = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$

Par convention, on mesure la tension entre le + et le -. Posons donc $U = U_{BA}$.

En exprimant la charge en fonction de la tension, il vient :

$$\begin{array}{l} \text{Charge électrique} \\ \text{du condensateur plan} \end{array} \quad Q = \frac{\epsilon_0 S}{d} U \quad [\text{C}] \quad (2.16)$$

On voit que la charge est proportionnelle à la tension entre les plaques. La constante de proportionnalité s'appelle la capacité du condensateur. Elle se mesure⁹ en farad, abrégé F.

$$\begin{array}{l} \text{Définition de la capacité} \end{array} \quad \boxed{C \equiv \frac{Q}{U}} \quad [\text{F}] \equiv [\text{C/V}] \quad (2.17)$$

$$\begin{array}{l} \text{Capacité du condensateur plan} \end{array} \quad \boxed{C = \frac{\epsilon_0 S}{d}} \quad [\text{F}] \quad (2.18)$$

⁹ Michael Faraday 1791 – 1867, chimiste et physicien anglais. Lors de son apprentissage de relieur, il profite de lire les ouvrages de chimie et d'électricité qui lui tombent sous la main. Remarqué par un membre de la Royal Society, il en devint membre en 1812, puis professeur en 1833.

2.5.2 Condensateur cylindrique

Les armatures sont constituées de deux cylindres métalliques coaxiaux.

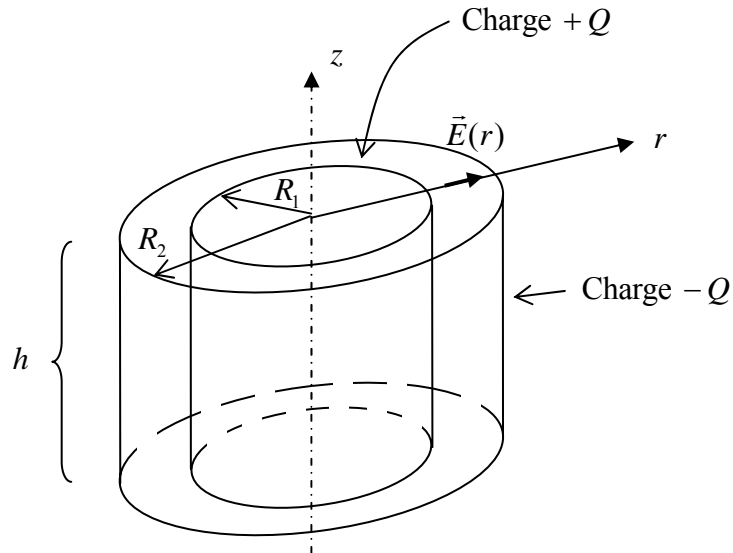


Fig. 22 – Condensateur cylindrique (placé dans le vide)

Ici également, on peut négliger les effets de bords si la distance qui sépare les cylindres est petite par rapport à la hauteur h .

Nous avons vu au § 2.3.5.1 que le champ électrique dans une telle géométrie est purement radial.

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{Q}{h} \quad \text{pour} \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

D'après la définition (2.8) de la tension, on a

$$U = U_{12} = - \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h r} dr = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln r \Big|_{R_2}^{R_1} = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} (\ln R_1 - \ln R_2)$$

Charge électrique
du condensateur cylindrique

$$Q = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)} U \quad [C] \quad (2.19)$$

Capacité
du condensateur cylindrique

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)} \quad [F] \quad (2.20)$$

2.5.3 Condensateur sphérique

Les armatures sont constituées de deux sphères métalliques dont les centres coïncident. Soit R_1 le rayon de la sphère intérieure et R_2 celui de la sphère extérieure. Soit Q la charge de la sphère intérieure. Comme pour une charge ponctuelle, le champ électrique est purement radial.

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{pour } R_1 \leq r \leq R_2$$

D'après la définition (2.8) de la tension, on a

$$U = U_{12} = - \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{R_2}^{R_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Charge électrique
du condensateur sphérique

$$Q = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} U \quad [\text{C}] \quad (2.21)$$

Capacité
du condensateur sphérique

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \quad [\text{F}] \quad (2.22)$$

Si l'on éloigne la sphère extérieure à l'infini, on obtient :

Capacité de la sphère
(de rayon R)

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad [\text{F}] \quad (2.23)$$

2.5.4 Ligne bifilaire

On peut montrer (cf exercice) que la capacité d'une ligne formée de deux conducteurs parallèles est donnée approximativement par :

$$C = \frac{\pi\epsilon_0 \ell}{\ln\left(\frac{2d}{a} - 1\right)} \quad [\text{F}] \quad (2.24)$$

Avec :

- ℓ longueur de la ligne
- a diamètre des fils
- d distance entre les fils ($d \gg a$)

En pratique, on donne la **capacité linéique** des câbles de transmission en nanofarads par kilomètre ($1 \text{ nF/km} = 10^{-12} \text{ F/m}$).

2.5.5 Combinaisons de condensateurs

Lorsqu'on met des condensateurs **en série**, la charge de chacun d'eux est égale.

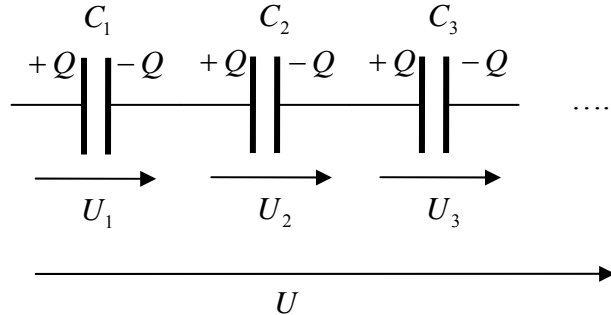
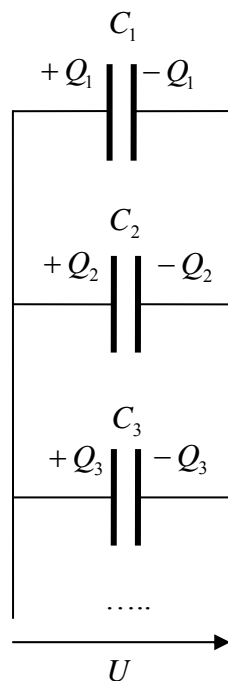


Fig. 23 – Condensateurs en série

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \right)$$

Calcul de la capacité équivalente $\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots}$ $[F^{-1}]$ (2.25)



Lorsqu'on met des condensateurs **en parallèle**, la tension aux bornes de chacun d'eux est égale.

Charge totale :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots = C_1 U + C_2 U + C_3 U + \dots$$

$$Q = (C_1 + C_2 + C_3 + \dots) U$$

Capacité équivalente :

$$\boxed{C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots}$$
 (2.26)

Fig. 24 – Condensateurs en parallèle

2.5.6 Energie stockée

Soit un condensateur de capacité C dont les armatures présentent une différence de potentiel u . Le condensateur porte donc une charge $q = Cu$.

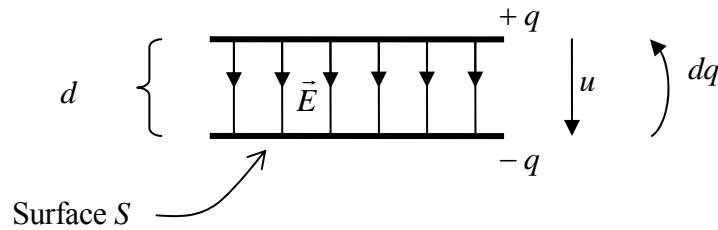


Fig. 25 – Condensateur plan

Pour amener une petite charge dq de l'armature négative à l'armature positive, il faut donc fournir un travail élémentaire :

$$dW = u dq$$

L'énergie stockée dans le condensateur s'obtient en sommant (intégrant) ces travaux élémentaires de zéro à la tension finale U .

$$W = \int_0^U dW = \int_0^U u dq = \int_0^U u C du = C \int_0^U u du = \frac{1}{2} CU^2$$

En fonction de la charge finale $Q = CU$:

$$W = \frac{1}{2} C \left(\frac{Q}{C} \right)^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

Energie stockée dans un condensateur

$$\boxed{W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C}} \quad [\text{J}] \quad (2.27)$$

Calculons encore la densité d'énergie contenue dans le champ électrique. Dans le cas du condensateur plan, en négligeant les effets de bords, le champ est quasi uniforme dans le volume Sd compris entre les plaques et nul à l'extérieur.

Densité d'énergie :

$$w = \frac{1}{Sd} W = \frac{1}{Sd} \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{Sd} \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_0 S}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Densité d'énergie du champ \vec{E}
(dans le vide)

$$\boxed{w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2} \quad [\text{J/m}^3] \quad (2.28)$$

2.6 LE CHAMP ÉLECTRIQUE DANS LA MATIÈRE

Que se passe-t-il si l'on introduit de la matière dans un champ électrique ? Il nous faut distinguer deux cas selon que les charges sont libres ou non de se déplacer à l'intérieur de la matière.

2.6.1 Matériaux conducteurs

En électrostatique, le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur est nul. En effet, s'il existait un tel champ, les charges libres de se déplacer se mettraient en mouvement, ce qui contredirait l'hypothèse du cas statique. Comme les charges de même signe se repoussent, celles-ci ont tendance à se placer le plus loin possible les unes des autres. Elles se concentrent près de la surface du conducteur

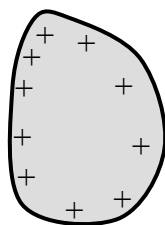


Fig. 26 – Conducteur chargé

Sous l'effet d'un champ électrique extérieur, la répartition se modifie de telle sorte que la surface du métal soit une équipotentielle du champ. Au voisinage de la surface, **les lignes du champ électrique sont donc perpendiculaires à la surface.** Comme une ligne de champ part d'une charge positive et se termine sur une charge négative, il doit donc apparaître une charge superficielle sur le conducteur. Il y a un déficit d'électrons dans les zones positives et un excès d'électrons dans les zones négatives.

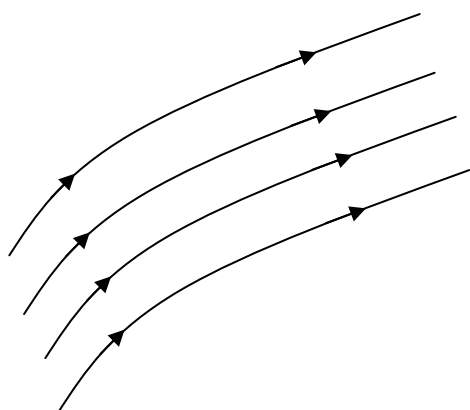


Fig. 27a – Champ \vec{E} dans le vide

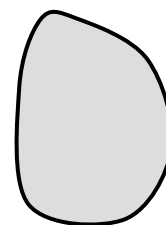


Fig. 27b – Autour d'un conducteur
(Compléter le dessin en classe)

2.6.1.1 Blindage électrostatique

Une ligne de champ ne pouvant débuter et se terminer sur une équipotentielle, il s'ensuit que le champ électrique est nul également à l'intérieur d'une boîte métallique fermée. En pratique, ceci permet de réaliser un **blindage électrostatique** afin d'isoler les dispositifs sensibles aux influences électriques extérieures.

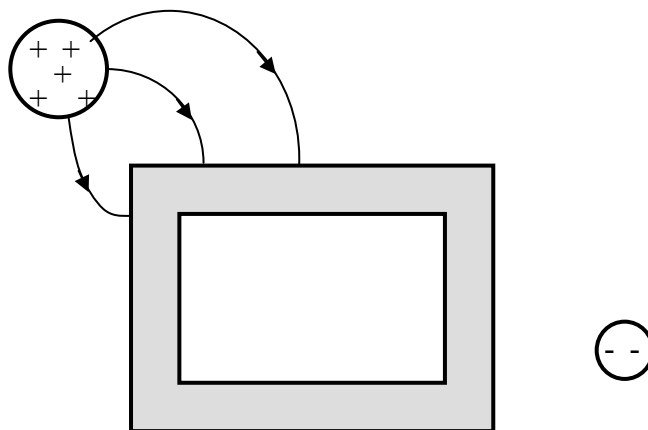


Fig. 28a – Boîte métallique vide

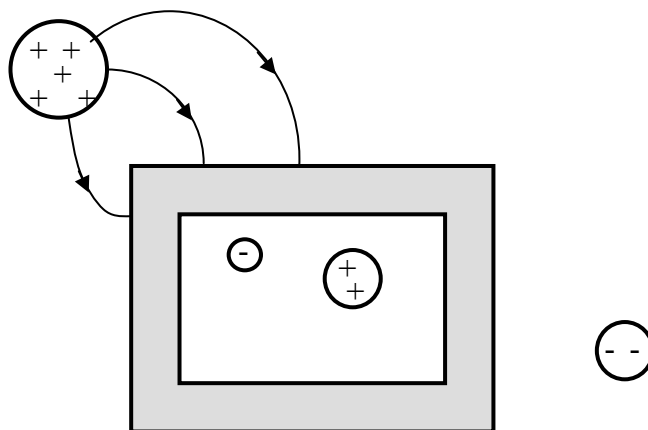


Fig. 28b – Charges à l'intérieur

(Compléter les dessins en classe)

En présence de charges électriques à l'intérieur du blindage, la densité superficielle sur les parois internes du blindage s'ajuste en conséquence. Le champ électrique à l'intérieur est indépendant du champ extérieur.

En pratique, les parois du blindage n'ont pas besoin d'être en métal épais ; un grillage métallique suffit. C'est ce qu'on appelle une **cage de Faraday**.

2.6.1.2 Plaque conductrice à l'intérieur d'un condensateur plan

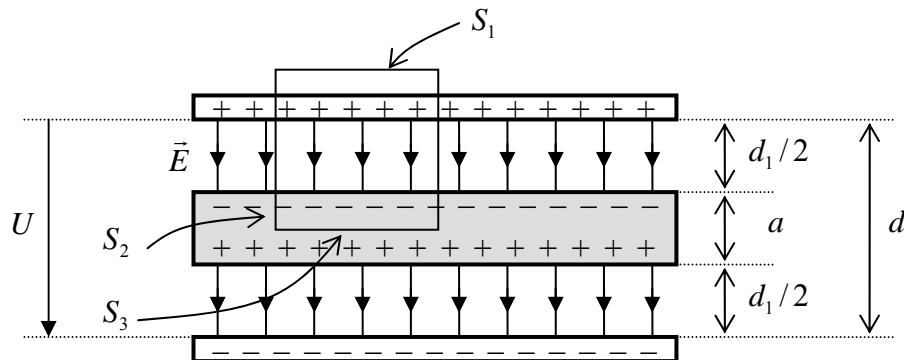


Fig. 29 – Plaque conductrice dans un condensateur plan
(on néglige les effets de bords)

Soit a l'épaisseur de la plaque et d la distance entre les deux armatures du condensateur. Appliquons le théorème de Gauss au cylindre dessiné ci-dessus et délimité par les surfaces S_1 , S_2 , et S_3 . Le flux du champ électrique est nul à travers ces trois surfaces. En effet :

- sur S_1 le champ est nul à l'extérieur du condensateur ;
- sur S_2 le flux est nul car le champ est parallèle à S_2 ;
- sur S_3 le champ est nul dans la plaque conductrice.

La somme des charges électriques à l'intérieur du cylindre est donc nulle. On en conclut que la densité superficielle de charge sur la plaque est égale, mais de signe opposé à celle se trouvant sur l'armature supérieure du condensateur. Le même raisonnement peut être fait pour la partie inférieure.

Calculons la capacité C_1 du condensateur avec la plaque. Elle est égale celle de deux condensateur plans en série d'épaisseur $d_1/2 = (d - a)/2$. Soit S la surface d'une armature. En vertu de (2.18) et 2.25 :

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 S}{(d_1/2)}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 S}{(d_1/2)}} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 S}{d_1}} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 S}{d - a}}$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - a} \quad [\text{F}] \quad (2.29)$$

2.6.2 Matériaux diélectriques

Dans un diélectrique (isolant), les électrons ne sont pas libres de se mouvoir d'un bout à l'autre du matériau, mais restent attachés aux atomes ou aux molécules. Sous l'effet d'un champ électrique, ces molécules vont avoir tendance à se déformer et/ou s'orienter de manière à affaiblir le champ appliqué.

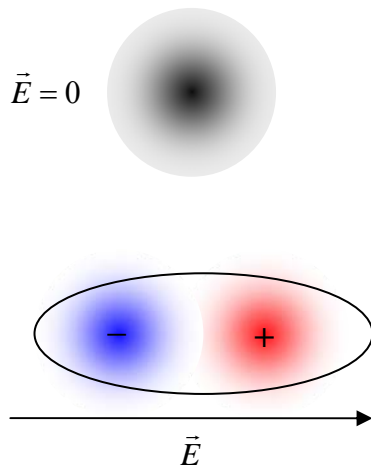


Fig. 30a – Molécule non polaire

En présence d'un champ électrique les centres de gravité des charges positives et négatives se séparent.

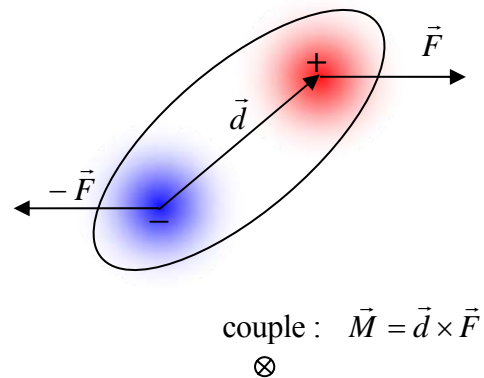


Fig. 30b – Molécule polaire

Un **dipôle** permanent a tendance à s'orienter en présence d'un champ électrique.

Sous l'effet d'un champ électrique, une molécule non polaire acquiert un dipôle induit. La séparation des charges est limitée par les forces élastiques de rappel. Au delà d'une certaine limite¹⁰, il y a rupture : c'est le phénomène de **claquage**. Pour un champ plus faible, l'écartement des charges est proportionnel à l'intensité du champ.

Le « degré d'alignement » des molécules polaires dépend aussi de l'intensité du champ jusqu'à la saturation. L'agitation thermique tend à détruire l'alignement, donc dans ce cas, le magnétisme va aussi dépendre de la température.

Dans un champ \vec{E} uniforme, un dipôle subit un couple (voir fig. ci-dessus) :

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} = \vec{d} \times q\vec{E} = q\vec{d} \times \vec{E}$$

Le produit de la charge par la vecteur distance, orienté du moins au plus est appelé :

Moment dipolaire électrique

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

[Cm]

(2.30)

¹⁰ Appelée **rigidité diélectrique** (Voir table 4.)

Si l'on met une plaque isolante à l'intérieur d'un condensateur plan, la matière se polarise, ce qui se traduit globalement par l'apparition de charges superficielles.

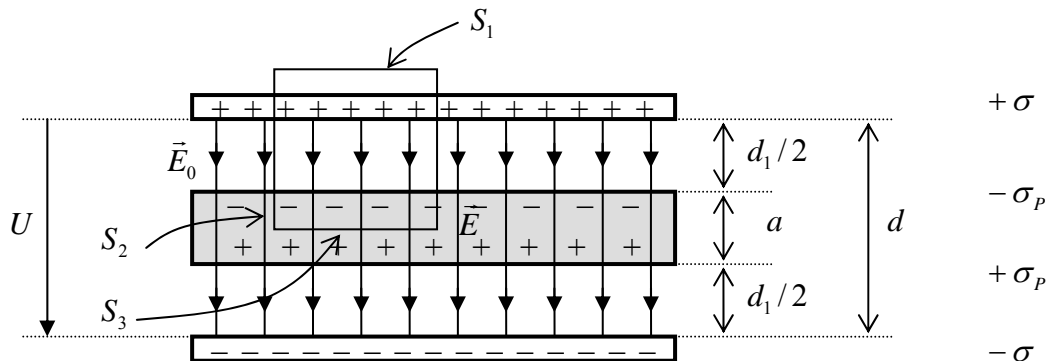


Fig. 31 – Plaque isolante dans un condensateur plan
(on néglige les effets de bords)

Notations :

\vec{E}_0 le champ électrique dans le vide, entre les armatures et la plaque isolante ;

\vec{E} le champ électrique dans la plaque isolante ;

σ la densité de charge superficielle sur l'armature positive, en C/m^2 ;

σ_p la densité de charge superficielle sur la plaque isolante.

En face de l'armature négative, on a $+\sigma_p$ et en face de l'armature positive, on a $-\sigma_p$.

Appliquons le théorème de Gauss au cylindre dessiné ci-dessus et délimité par les surfaces S_1 , S_2 , et S_3 . Soit A est l'aire de la surface S_2 , qui est aussi égale à l'aire de la surface S_3 ;

- sur S_1 le flux est nul car le champ est nul à l'extérieur du condensateur ;
- sur S_2 le flux est nul car le champ est parallèle à S_2 .
- sur S_3 le flux vaut $E A$;

Le flux total vaut $1/\epsilon_0$ fois la somme des charges à l'intérieur du cylindre, soit :

$$E A = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma A - \sigma_p A)$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$$

$$E = E_0 - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \quad [\text{V/m}] \quad (2.31)$$

Le premier terme est le champ en l'absence de diélectrique (voir éq. 2.15), noté ici E_0 .

Le second terme représente la contribution des dipôles qui tend à s'opposer au champ appliqué.

L'équation (2.31) contient des grandeurs qui ne sont pas aisées à mesurer directement. En revanche la mesure de la capacité est plus facile.

$$\text{Capacité du condensateur vide, par définition : } C_0 = \frac{Q}{U_0} = \frac{\sigma S}{E_0 d}$$

$$\text{Capacité du condensateur de la fig 31: } C_1 = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{E_0 d_1 / 2 + E a + E_0 d_1 / 2}$$

$$\text{Capacité d'un condensateur complètement rempli, } d_1 \rightarrow 0 \text{ et } a \rightarrow d : C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{E d}$$

$$\text{Rapport des capacités : } \frac{C}{C_0} = \frac{\frac{\sigma S}{E d}}{\frac{\sigma S}{E_0 d}} = \frac{E_0}{E} \equiv \varepsilon_r \quad [-] \quad (2.32)$$

Ainsi le rapport des capacités est dans le rapport inverse des champs électriques. C'est un nombre sans dimension, appelé **constante diélectrique**, et qui est caractéristique du matériau.

La constante diélectrique ε_r est par définition égale au rapport entre la capacité d'un condensateur plan complètement rempli de diélectrique et celle d'un condensateur vide.

Capacité d'un condensateur plan rempli de diélectrique

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} \quad [F] \quad (2.33)$$

Le produit $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ s'appelle **permittivité** du matériau. Dans le vide $\varepsilon_r = 1$.

Revenons à l'équation (2.31). Pour interpréter le terme σ_p / ε_0 , calculons la **polarisation**, définie comme le **moment dipolaire par unité de volume**.

Globalement le moment dipolaire total de la plaque vaut : (charge)(distance) = $(\sigma_p S)a$

$$\text{En module : } |\vec{P}| = \frac{(\sigma_p S)a}{S a}$$

Module de la polarisation

$$|\vec{P}| = \sigma_p \quad [C/m^2] \quad (2.34)$$

Ce moment est dirigé vers le bas dans la fig. 31, comme le champ électrique. On peut donc écrire le vecteur polarisation :

$$\vec{P} = \sigma_p \frac{\vec{E}}{E}$$

Comme il existe un lien de cause à effet entre le champ électrique et la polarisation, il est légitime de s'intéresser à leur rapport.

Déf. : On appelle **susceptibilité électrique** le rapport entre la polarisation divisée par ε_0 et le champ électrique à l'intérieur du diélectrique.

Susceptibilité électrique

$$\chi_e \equiv \frac{P / \varepsilon_0}{E} \quad [-] \quad (2.35)$$

Avec cette définition (2.31) s'écrit : $E = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \chi_e E$

que l'on peut mettre sous la forme : $E_0 = (1 + \chi_e)E = \epsilon_r E$

où l'on a utilisé (2.32). Ainsi :

$$\boxed{\epsilon_r = 1 + \chi_e} \quad [-] \quad (2.36)$$

La susceptibilité et la « constante » diélectrique ϵ_r ne sont en réalité pas vraiment constantes ! elles dépendent en général de la température et du champ électrique. Pour les gaz, elles dépendent aussi de la pression. Pour les matériaux hygroscopiques, tels que le papier, elles dépendent aussi de l'humidité.

	$\epsilon_r = 1 + \chi_e$	Rigidité en kV/cm	Utilisation
vide	1	∞	
air sec (1 atm)	1,00059	30	
air sec (100 atm)	1,00055		
CO ₂ (1 atm)	1,00922	28	
papier paraffiné	2	100 à 200	
huile minérale	2,24	80 à 200	transformateurs
polyéthylène (PE)	2,25	200 à 300	isolation pour câbles
ébonite	2,8		
PVC	3,18	120 à 200	isolation simple
Polyester (mylar)	3,2	2750	condensateurs
papier	3,5	140	
mica	4 à 7	150	condensateurs
verre	3,7 à 10	100 à 400	
verre pyrex	4,5	130	
porcelaine	7	10 à 160	isolateurs
germanium	16		
eau distillée	80		50 à 100
Titanate de strontium	330		
Titanate de baryum	2760		

Table 4 – Constante diélectrique de quelques matériaux
(température ambiante et champ \ll rigidité)

2.6.3 Le champ de déplacement électrique

Dans la section précédente, on a vu que le champ électrique diminuait en pénétrant dans un matériau diélectrique. Plus précisément la composante normale du champ électrique à l'interface obéit à l'équation (voir 2.32) :

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

Cette équation suggère l'introduction d'un nouveau champ dont la composante normale est continue lorsque le champ traverse une interface avec un autre diélectrique. Définissons :

$$\text{Champ de déplacement électrique} \quad \boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}} \quad [\text{C/m}^2] \quad (2.37)$$

Dans le vide, on a : $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0$

Dans le matériau, on a : $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$

A l'interface¹¹ : continuité de la composante normale de \vec{D}

Au moyen de (2.35) et (2.36), exprimons \vec{D} en faisant intervenir explicitement la polarisation :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \quad [\text{C/m}^2] \quad (2.38)$$

Calculons le flux de \vec{D} au travers du cylindre dessiné ci-dessous et délimité par les surfaces S_1 , S_2 , et S_3 . Soit A est l'aire de la surface S_1 , qui est aussi égale à l'aire de la surface S_3 ;

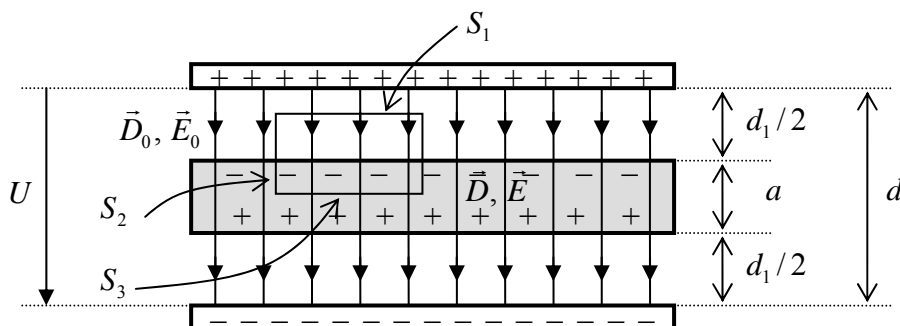


Fig. 33 – Diélectrique dans un condensateur plan

$$\oint_{\text{cylindre}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{D} \cdot d\vec{S} = -D_0 A + 0 + DA = 0$$

Le flux de \vec{D} est nul puisque les composantes normales de \vec{D} sont égales : $D = D_0$.

¹¹ On traite ici le cas du diélectrique non chargé, donc pas de charge superficielle « libre ».

Le flux de \vec{D} à travers le cylindre est également nul si la surface S_1 se trouve à l'intérieur du diélectrique. On en conclut que le flux du courant de déplacement est nul à travers toute surface fermée qui n'inclut que du vide et du diélectrique. Mais attention ceci n'est vrai que pour autant que le diélectrique ne renferme pas de charges libres, c'est-à-dire non appariées en dipôles. Si c'est le cas, il faut distinguer deux contributions au champ à l'intérieur du diélectrique.

Dans le cas d'un condensateur plan :

$$\vec{E} = \vec{E}_D + \vec{E}_L = (\text{champ extérieur} - \vec{P} / \epsilon_0) + (\text{champ dû aux charges libres})$$

Donc :

$$\vec{E} + \vec{P} / \epsilon_0 = \vec{E}_0 + \vec{E}_L$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \epsilon_0 \vec{E}_L$$

Appliquons le théorème de Gauss au membre de droite :

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \oiint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \oiint_S \vec{E}_L \cdot d\vec{S} = 0 + \epsilon_0 \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\substack{i=1 \\ \text{libres}}}^n q_i$$

Exprimé au moyen du champ de déplacement, le théorème de Gauss prend la forme :

$$\boxed{\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{libres}}}^n q_i} \quad [C] \quad (2.39a)$$

La somme ne porte plus que sur les charges libres. Celles qui contribuent à la polarisation sont déjà prises en compte dans la définition de \vec{D} .

Dans le cas d'une distribution continue de charge libre ρ , on aurait :

$$\boxed{\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV} \quad [C] \quad (2.39b)$$

2.6.4 Comportement du champ électrique à l'interface de deux diélectriques

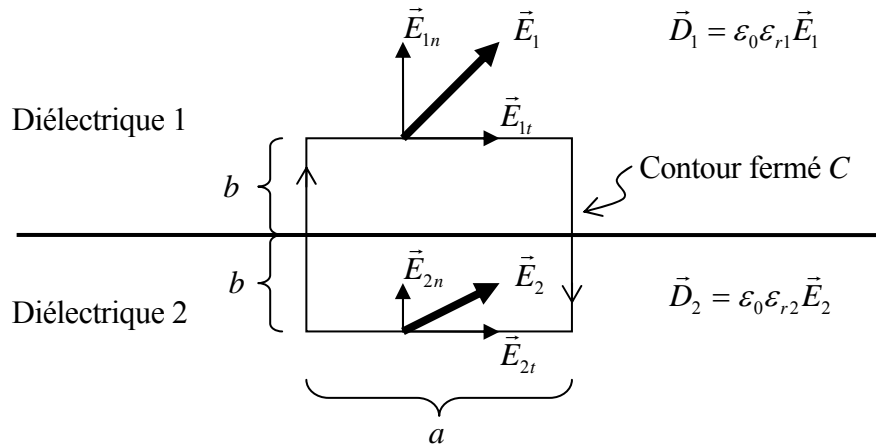


Fig. 34 – Interface de deux diélectriques
(globalement neutres)

Au voisinage de l'interface, considérons une portion de l'espace assez petite pour que l'on puisse admettre que les champs \vec{E} et \vec{D} soient constants. Chaque champ se décompose en composantes normale et parallèle à l'interface.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1n} + \vec{E}_{1t} \quad \text{et} \quad \vec{D}_1 = \vec{D}_{1n} + \vec{D}_{1t}$$

Nous avons vu au § précédent que la composante normale de \vec{D} était continue s'il n'y a pas de charges libres à l'interface. Donc :

$$\boxed{\varepsilon_1 \vec{E}_{1n} = \varepsilon_2 \vec{E}_{2n}} \quad (2.40a)$$

Pour voir comment se comportent les composantes tangentielles, calculons la circulation du champ \vec{E} sur le contour fermé C . Nous savons que cette circulation doit être nulle (voir 2.10).

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 = E_{1t}a - E_{1n}b - E_{2n}b - E_{2t}a + E_{2n}b + E_{1n}b$$

Donc la composante tangentielle de \vec{E} est continue.

$$\boxed{\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}} \quad (2.40b)$$

3. LE COURANT ÉLECTRIQUE

Chacun¹² sait que si l'on relie les électrodes d'un condensateur chargé au moyen d'un fil conducteur, on provoque un courant qui va rapidement décharger le condensateur. En effet le fil est soumis pendant un bref instant à un champ électrique qui met les électrons en mouvement de l'électrode négative à l'électrode positive.

Pour des raisons historiques, on prend comme sens positif du courant le sens contraire à celui des électrons. (A l'époque des premières expériences avec l'électricité, on n'avait pas encore découvert l'électron.) L'intensité du courant électrique est définie comme étant la charge écoulee par unité de temps, de l'électrode positive à l'électrode négative.

Intensité du courant électrique

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

[C/s] = [A]

(3.1)

L'unité est l'ampère¹³.

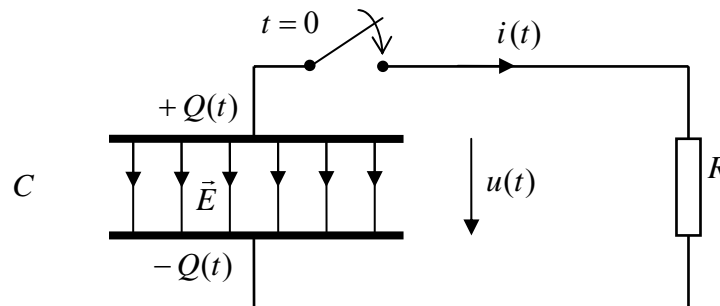


Fig. 35 – Décharge d'un condensateur

Selon la nature du conducteur, les électrons vont se mouvoir avec plus moins de facilité. La résistance des conducteurs résulte de la perte d'énergie lors des collisions avec les atomes, ce qui accroît l'agitation thermique. Du point de vue macroscopique, la différence de potentiel est la cause et le courant électrique la conséquence. Pour des tensions pas trop élevées, on constate expérimentalement que le courant est proportionnel à la tension aux extrémités du conducteur. C'est la loi d'Ohm¹⁴.

Loi d'Ohm

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

[A]

(3.2)

La constante de proportionnalité R est la **résistance** du conducteur. Elle se mesure en ohms. $1 \text{ ohm} = \Omega = \text{V/A}$.

Dans le schéma ci-dessus, toute la résistance du fil est symbolisée par un élément R .

L'inverse de la résistance est la **conductance**, qui se mesure en siemens¹⁵, abrégé S.

¹² Ce chapitre est volontairement bref, la théorie des circuits électriques faisant l'objet d'autres cours à la HEIG-VD.

¹³ André Marie Ampère, Lyon 1775 – Marseille 1836.

¹⁴ Georg Simon Ohm, Erlangen 1789 – Munich 1854.

¹⁵ Werner von Siemens, ingénieur allemand, 1816 -1892. Etablit en 1848 la première grande ligne télégraphique européenne entre Francfort et Berlin

3.1 COURANT DE DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR EN FONCTION DU TEMPS

Soit C la capacité du condensateur et U_0 la tension au temps $t = 0$.

A tout instant la charge aux bornes du condensateur de la fig. 35 est donnée (voir 2.17) par :

$$Q(t) = Cu(t)$$

Lorsque le courant circule, la charge du condensateur diminue, donc :

$$dQ(t) = -dq(t) = -i(t) dt$$

$$\frac{dQ}{dt} = -i = C \frac{du}{dt}$$

En utilisant la loi d'Ohm, il vient : $-\frac{u}{R} = C \frac{du}{dt}$

$$-\frac{du}{u} = \frac{1}{RC} dt$$

Intégration :

$$-\ln u = \frac{t}{RC} + Cste$$

Condition initiale : $u(0) = U_0 \Rightarrow Cste = -\ln U_0$

$$\ln u - \ln U_0 = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln \frac{u}{U_0} = -\frac{t}{RC}$$

Finalement :

$u(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$	[V]	(3.3a)
$i(t) = \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$	[A]	(3.3b)

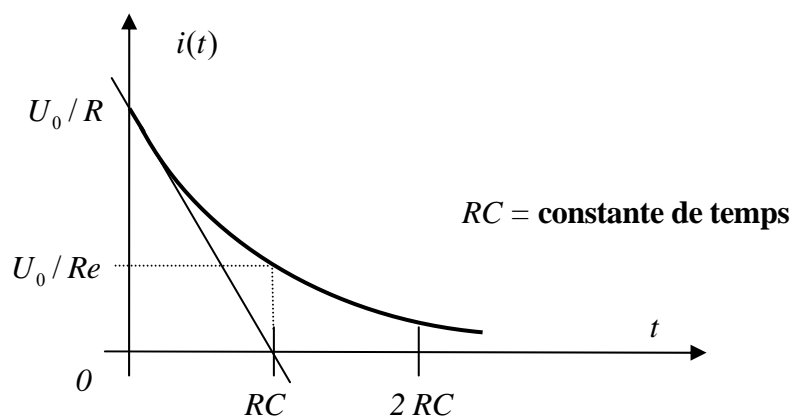


Fig. 36 – Allure de $i(t)$

Au bout de 4 à 5 RC , on admet que le condensateur est complètement déchargé.

3.2 RÉSISTIVITÉ

3.2.1 Théorie microscopique élémentaire

Étudions d'un peu plus près ce qui se passe au niveau microscopique dans un conducteur soumis à une différence de potentiel constante.

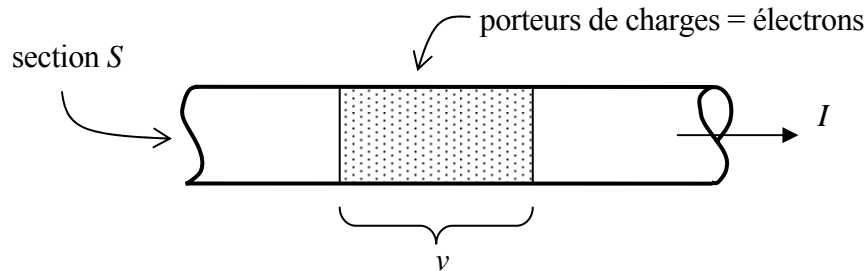


Fig. 37 – Segment de fil conducteur

Définissons les grandeurs suivantes :

U	différence de potentiel aux bornes du fil ;
ℓ	longueur du fil ;
$E = U / \ell$	champ électrique moyen ;
n	nombre d'électrons libres par unité de volume ;
v	vitesse moyenne des électrons selon la direction du fil ;
nSv	nombre d'électrons traversant une section S en 1 seconde ;
e	charge élémentaire ;
$I = nSve$	intensité du courant ;
eE	force motrice agissant sur un électron ;
$$	force de frottement.

Nous faisons ici l'hypothèse que l'effet des collisions des électrons avec les atomes du conducteur peut être modélisée par une force de frottement de type visqueux, c'est à dire proportionnelle à la vitesse moyenne des électrons. Le facteur k est donc supposé constant.

En régime stationnaire, les forces moyennes s'équilibrent.

$$eE = kv$$

En utilisant les relations ci-dessus :

$$U = \ell E = \ell \frac{kv}{e} = \ell \frac{k}{e} \frac{I}{nSe} = \frac{k}{ne^2} \frac{\ell}{S} I \quad (3.4)$$

En comparant cette expression avec la loi d'Ohm, la résistance du fil s'écrit : $R = \frac{k}{ne^2} \frac{\ell}{S}$

Le facteur $\frac{k}{ne^2}$ est la **résistivité** ρ_r du conducteur. Elle se mesure en Ωm .

Résistance d'un fil

$$R = \rho_r \frac{\ell}{S} \quad [\Omega] \quad (3.5)$$

Dans ce cours, nous utilisons l'indice r car nous utilisons ρ pour la densité de charge.

Pour des valeurs numériques de la résistivité des métaux et des substances usuelles, on peut consulter, par exemple, les tables CRM.

Exemple : Fil de cuivre de 1 mm^2 de section et de 10 m de longueur

$$\text{Résistance : } R = 1,68 \cdot 10^{-8} \frac{10}{10^{-6}} = 0,168 \Omega$$

Calcul de la vitesse des électrons dans un fil de cuivre (estimation)

Faisons l'hypothèse que par atome de cuivre il y ait un électron libre qui participe à la conduction.

$$\text{Masse volumique : } \rho_{Cu} = 8920 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Masse molaire : } M = 63,55 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$$

$$\text{Nombre d'Avogadro : } N_A$$

Nombre d'électrons par unité de volume :

$$n = \frac{\rho_{Cu}}{M} N_A = \frac{8920}{63,55 \cdot 10^{-3}} 6,024 \cdot 10^{23} = 8,46 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

Pour un courant de 1 A, on obtient :

$$v = \frac{I}{nSe} = \frac{1}{8,46 \cdot 10^{28} \cdot 10^{-6} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}} = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

Cette vitesse moyenne est très faible. Alors comment expliquer qu'une lampe s'allume quasi instantanément lorsqu'on ferme l'interrupteur ?

(à discuter en classe)

3.2.2 Puissance dissipée par effet Joule

La mesure de la puissance dissipée dans une résistance peut se faire à l'aide du montage schématisé ci-dessous. Le voltmètre mesure la tension aux bornes de la résistance et l'ampèremètre l'intensité du courant qui la traverse.

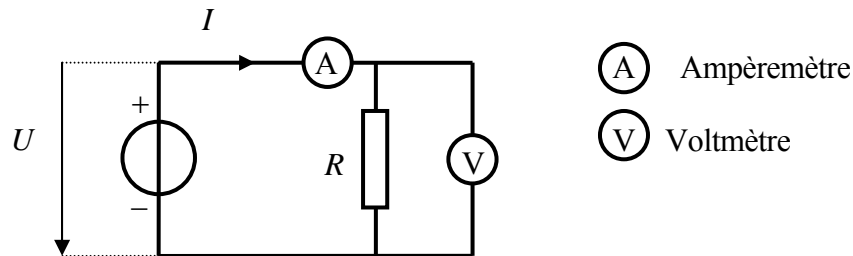


Fig. 38 – Résistance connectée à une source de tension

En traversant la résistance, une charge électrique q perd une énergie potentielle qui est égale à qU (voir éq. 2.8). Cette énergie augmente l'agitation thermique des atomes de la résistance ; autrement dit, elle se transforme en chaleur.

$$W = qU$$

Puissance :

$$P = \frac{dW}{dt} = U \frac{dq}{dt} = UI$$

Puissance dissipée $P = UI$ [W] (3.6)

Si le courant est proportionnel à la tension, on peut exprimer la puissance en fonction de la tension ou du courant.

Cas de la résistance ohmique $P = \frac{U^2}{R} = RI^2$ [W] (3.7)

3.2.3 Variation de la résistivité des métaux en fonction de la température

La résistivité des métaux augmente suffisamment avec la température pour qu'il faille en tenir compte dans beaucoup d'applications. On conçoit aisément que plus l'agitation thermique est grande, plus les collisions avec les atomes du réseau cristallin auront tendance à dévier les électrons et donc globalement à les freiner.

Au voisinage de la température ambiante, la variation de la résistivité est à peu près linéaire.

$$\rho_r(\theta) = \rho_{20} [1 + \alpha_{20}(\theta - 20)] \quad [\Omega\text{m}] \quad (3.8)$$

$\rho_r(\theta)$ résistivité à la température θ
 ρ_{20} résistivité à 20°C
 α_{20} coefficient d'accroissement.

	ρ_{20} [Ωm]	α_{20}
Cuivre pur	$1,673 \cdot 10^{-8}$	$4,05 \cdot 10^{-3}$
Cuivre standard	$1,724 \cdot 10^{-8}$	$3,93 \cdot 10^{-3}$
Argent	$1,5710^{-8}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$
Platine	$10,6 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Fer pur	$9,7 \cdot 10^{-8}$	$6,5 \cdot 10^{-3}$
Fer standard	11 à $13 \cdot 10^{-8}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$
Fonte	$67 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-3}$
Aluminium pur	$2,65510^{-8}$	$4,03 \cdot 10^{-3}$
Aluminium standard	$2,82810^{-8}$	$4,03 \cdot 10^{-3}$

Table 5 – Résistivité de quelques métaux

Application : sonde PT100

On utilise la variation de la résistivité du platine pour fabriquer des sondes de température pouvant aller de -200°C à +650°C. On utilise une formule à 3 coefficients¹⁶ de la forme :

$$\frac{\rho_r(\theta)}{\rho_r(0)} = 1 + \alpha \left[\theta - \delta \left(\frac{\theta - 100}{100} \right) \frac{\theta}{100} - \beta \left(\frac{\theta - 100}{100} \right) \left(\frac{\theta}{100} \right)^3 \right]$$

$$\alpha = \frac{R(100) - R(0)}{100R(0)} = 3,92 \cdot 10^{-3} \quad \delta = 1,492 \quad \beta = 0,11 \quad \text{si } \theta < 0 \quad \text{et } \beta = 0 \quad \text{si } \theta \geq 0$$

¹⁶ Voir par exemple « Les capteurs en instrumentation industrielle », Georges Asch et coll., Dunod, Paris.

En dessous de la température ambiante, la résistivité des métaux chute avec la température. Certains métaux, comme le cuivre, le platine, gardent une résistivité finie près du zéro absolu, d'autres, comme le plomb, deviennent **supraconducteurs**. La résistivité est rigoureusement nulle en dessous d'une température dite critique.

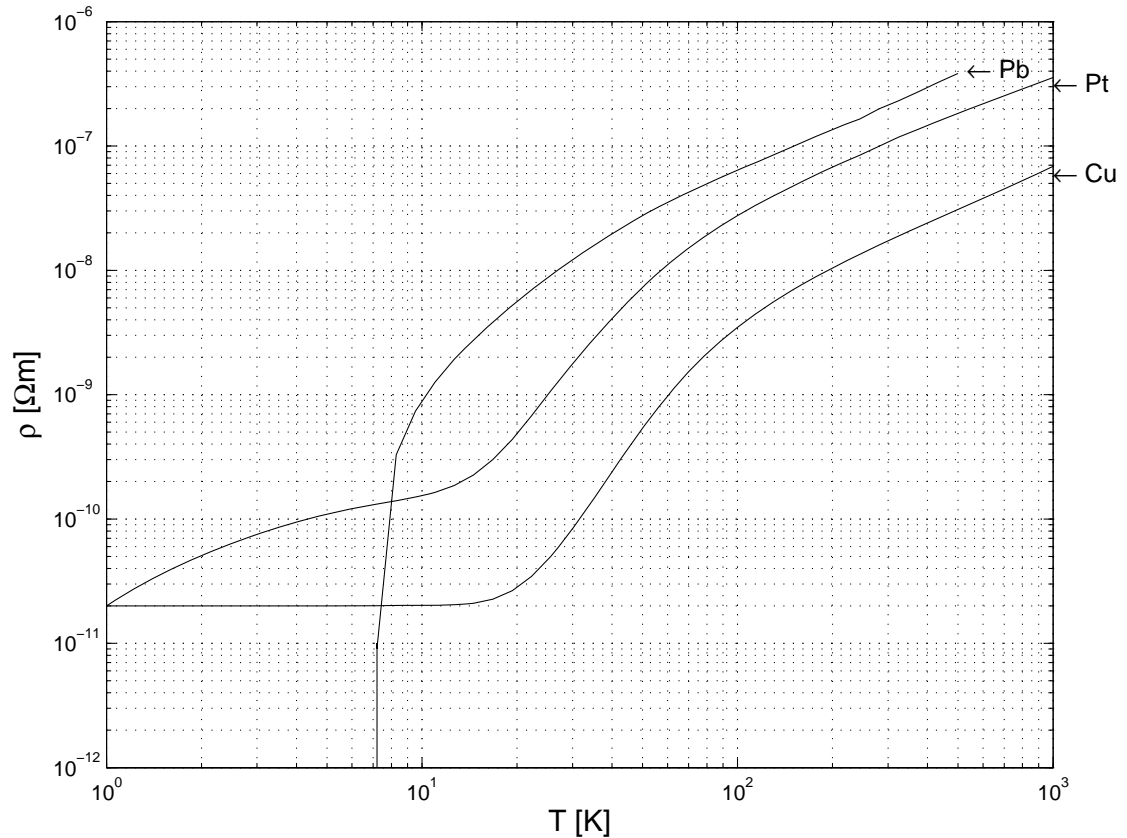


Fig. 39 – Résistivité de quelques métaux purs

Près de 0 K, la résistivité des métaux non supraconducteurs dépend beaucoup de leur pureté.

(Source : Handbook of Physics and Chemistry)

	T_c [K]	année
Mercure (Hg)	4,15	1911
Plomb (Pb)	7,2	
Etain (Sn)	3,72	
Niobium (Nb)	9,25	
NbN	16	1941
Nb ₃ Sn	18,05	
YBa ₂ Cu ₃ O ₇	92	1987
Oxyde de Cu Hg Ba Ca	138	1993

Table 6 – Température critique de quelques supraconducteurs
(à pression normale et sans champ magnétique)

3.3 CONDUCTIVITÉ, DENSITÉ DE COURANT ET ÉQUATION DE CONTINUITÉ

3.3.1 Loi d'Ohm sous forme locale

La conductivité est l'inverse de la résistivité.

$$\boxed{\sigma = 1/\rho_r} \quad [\Omega^{-1}\text{m}^{-1}] \text{ ou } [\text{S/m}] \quad (3.9)$$

(On utilise habituellement même la lettre σ que pour la charge superficielle. Selon le contexte, il est conseillé de préciser quelle est la grandeur physique représentée, par exemple au moyen d'un indice.)

La **densité de courant** est définie comme l'intensité du courant électrique par unité de surface. Dans le cas d'un conducteur où circule un courant homogène I au travers de sa section S (fig. 37), on a :

$$J = I/S \quad [\text{A/m}^2] \quad (3.10)$$

En fonction de la vitesse v des porteurs de charge, de leur nombre n par unité de volume et de leur charge e :

$$J = nev$$

Le produit ne est la densité de charge ρ .

$$J = \rho v$$

Pour exprimer J en fonction du champ électrique, utilisons les relations (3.4 et 3.5).

$$E = \frac{k}{ne^2} \frac{I}{S} = \rho_r J = \frac{1}{\sigma} J$$

La densité de courant, la vitesse des porteurs et le champ électrique sont des grandeurs vectorielles. La formulation générale des équations ci-dessus est :

$$\text{Densité de courant} \quad \vec{J} = \rho \vec{v} \quad [\text{A/m}^2] \quad (3.11)$$

$$\text{Loi d'Ohm sous forme locale} \quad \boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}} \quad [\text{A/m}^2] \quad (3.12)$$

3.3.2 L'équation de continuité sous forme intégrale

Pour établir l'équation de continuité, considérons un volume de matière contenant des charges électriques. La densité de charge $\rho(x, y, z, t)$ est en général une fonction des coordonnées spatiales et du temps t .

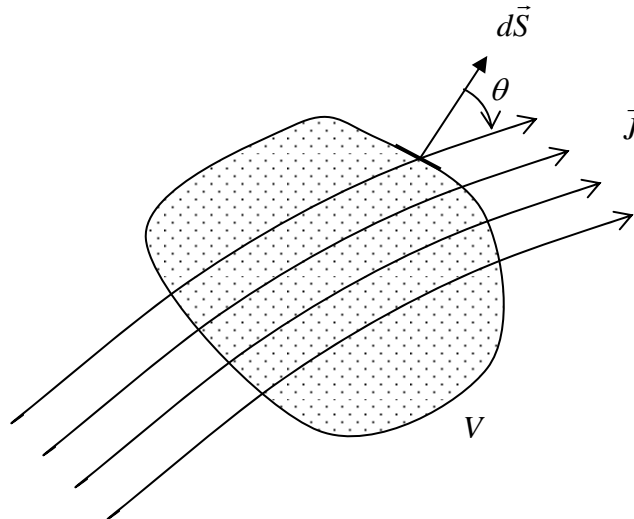


Fig. 40 – Volume de matière traversé par une densité de courant

A chaque instant la charge présente dans le volume V s'obtient en intégrant la densité de charge sur le volume.

$$Q(t) = \iiint_V \rho dV$$

Le courant de charges traversant un élément de surface dS est égal à $J dS \cos \theta = \vec{J} \cdot d\vec{S}$.

En prenant soin d'orienter $d\vec{S}$ vers l'extérieur de la surface, on obtient le courant total quittant le volume V par une intégrale de surface.

$$I(t) = \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

La conservation de la charge électrique implique que courant est égal à la variation de la charge à l'intérieur du volume

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}$$

L'équation de continuité se déduit des relations ci-dessus.

Equation de continuité

$$\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

[A]

(3.13)

Application : Premier théorème de Kirchhoff

La somme algébrique des courants entrant et sortant d'un nœud d'un circuit électrique est nulle.

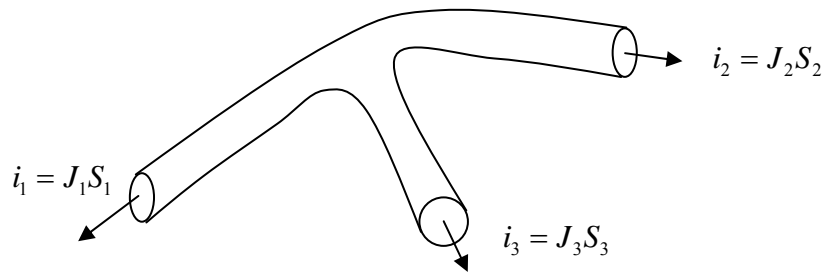


Fig. 41 – Nœud d'un circuit

Appliquons l'équation de continuité au volume dessiné ci-dessus. L'intégrale de surface se ramène à

$$\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = J_1 S_1 + J_2 S_2 + J_3 S_3 = i_1 + i_2 + i_3$$

L'intégrale de \vec{J} au travers de la surface latérale est nulle, car nous supposons les conducteurs bien isolés.

En régime stationnaire, la densité de charge ne varie pas dans le temps : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

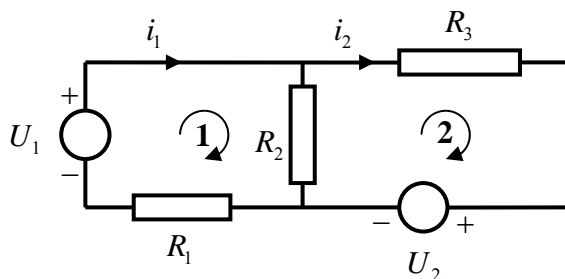
Donc : $i_1 + i_2 + i_3 = 0$. On généralise facilement ce résultat à un nœud formé d'un nombre quelconque de fils. Ce qui prouve le théorème.

Deuxième théorème de Kirchhoff

La somme algébrique des chutes de tension autour d'une maille d'un circuit est nulle.

Ce théorème résulte directement du fait que la circulation du champ électrique est nulle sur un contour fermé (éq. 2.10).

En pratique, on compte positivement les sources de tensions quand on les « traverse » du – au + et négativement les chutes de tensions dans les résistances si on les traverse dans le sens choisi pour mesurer le courant.



$$\text{Maille 1 : } U_1 - R_2(i_1 - i_2) - R_1 i_1 = 0$$

$$\text{Maille 2 : } -R_3 i_2 - U_2 - R_2(i_2 - i_1) = 0$$

Fig. 42 – Circuit à 2 mailles

3.3.3 L'équation de continuité sous forme locale

Appliquons l'équation de continuité à un cube centré en un point quelconque (x, y, z) . Supposons les dimensions $\Delta x, \Delta y$ et Δz de ce cube suffisamment petites pour que l'on puisse considérer la densité de charge à l'intérieur comme constante et égale à $\rho_0 = \rho(x, y, z)$.

$$\text{Charge totale dans le cube : } \iiint_V \rho dV = \rho_0 \iiint_V dx dy dz = \rho_0 \Delta x \Delta y \Delta z = \rho(x, y, z) \Delta V$$

Courant passant au travers des surfaces perpendiculaires à l'axe x :

$$\Delta I_x = J_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \Delta y \Delta z - J_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \Delta y \Delta z$$

que l'on peut écrire :

$$\Delta I_x = \frac{J_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - J_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Pour Δx petit, on voit apparaître la dérivée de J_x par rapport à x . A la limite :

$$\Delta I_x = \frac{\partial J_x}{\partial x} \Delta V$$

On peut faire le même raisonnement pour les autres faces. Finalement l'équation de continuité (3.13) s'écrit :

$$\Delta I_x + \Delta I_y + \Delta I_z = \frac{\partial J_x}{\partial x} \Delta V + \frac{\partial J_y}{\partial y} \Delta V + \frac{\partial J_z}{\partial z} \Delta V = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta V$$

Equation de continuité
sous forme locale

$$\boxed{\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad [\text{A/m}^3] \quad (3.14)$$

En définissant la divergence $\text{div } \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$, l'équation de continuité se met sous la forme compacte habituelle :

$$\boxed{\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad [\text{A/m}^3] \quad (3.14)$$

L'opérateur divergence est aussi noté $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Il est appelé nabla ou del.

Il agit sur un vecteur à la façon d'un produit scalaire.

$$\text{div } \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$$

